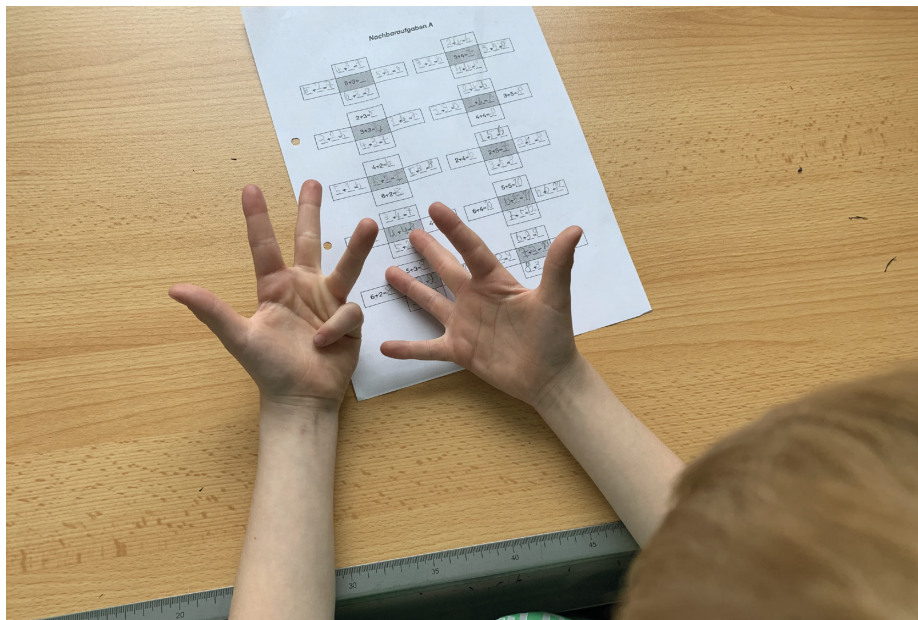


MITTEILUNGEN

DER GESELLSCHAFT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK



3.14159265358979323846
2643383279502884197169
3993751058209749445923
0781640628620899862803
4825342117067982148086
5132823066470938446095
5058223172535940812848
1117450284102701938521
1055596446229489549303
8196442881097566593344
6128475648233786783165
2712019091456485669234
6034861045432664821339
3607260249141273724587
0066063155881748815209
2096282925409171536436
7892590360011330530548
8204665213841469519415
1160943305727036575959
1953092186117381932611
7931051185480744623799
6274956735188575272489
1227938183011949129833

Ich hasse Mathe weil man manchmal eine Seite lösen muss, wo man es nicht kapiert. Trotzdem wenn die Lehrerin helfen will kapiere ich es auch nicht.

**Michael Gaidoschik, Elisabeth Moser Opitz,
Marcus Nührenbörger und Elisabeth Rathgeb-Schnierer**

Unter Beratung von: Daniela Götze,
Uta Häsel-Weide und Wolfram Meyerhöfer

Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen



111S

Sonderausgabe 2021

Lizenzhinweis

Die vorliegende Schrift „Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ steht unter der Lizenz „Creative Commons BY-SA 4.0: Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International“ siehe creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de

Die Originalpublikation finden Sie im Internet unter:
ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/article/view/1042/1156

Der Nachdruck des Originals erfolgte mit folgenden Änderungen:

- Einfügen dieser Seite
- Einfügen der vorletzten Seite
- Einfügen der Rückseite

Dieser Nachdruck wird Ihnen zur Verfügung gestellt vom

Institut für Mathematisches Lernen

38100 Braunschweig, Steinweg 4

38518 Gifhorn, Isenbütteler Weg 43

E-Mail: info@zahlbegriff.de

Tel.: 0531 - 12 16 77 50

Tel.: 05371 - 9 45 95 98

Web: www.zahlbegriff.de

Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

Michael Gaidoschik,
Elisabeth Moser Opitz,
Marcus Nührenbörger und
Elisabeth Rathgeb-Schnierer

Unter Beratung von Daniela Götze,
Uta Häsel-Weide und Wolfram Meyerhöfer

Vorwort: Symposien zu aktuellen Themen der Mathematikdidaktik

2018 ist die Leitlinie zur »Diagnostik und Behandlung der Rechenstörung«, die von einer Kommission unter Federführung der Fachgesellschaft »Deutsche Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie e. V. (DGKJP)« erstellt wurde, veröffentlicht worden. Ganz unabhängig von der detaillierten Bewertung der Leitlinie ist für die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) anhand dieser Leitlinie deutlich geworden, dass es aktuelle Themen zum Lehren und Lernen gibt, die auch aus einer spezifisch mathematikdidaktischen Perspektive betrachtet werden sollten und zu denen eine spezifisch mathematikdidaktische Position deutlich gemacht werden muss.

Aus diesem Grund hat die GDM »Symposien zu aktuellen Themen der Mathematikdidaktik« ins Leben gerufen, deren Aufgabe es ist, auf einer mathematikdidaktischen, wissenschaftlichen Grundlage, Positionen der GDM zu finden und in einem Positionspapier zu bündeln, das sich einerseits am Stand der Forschung zum mathematischen Lernen und Lehren orientiert und sich andererseits an die Praxis des Lehrens und Lernens von Mathematik richten soll. Diese wissenschaftlichen und für die Praxis entwickelten Positionspapiere sind nicht allein für die Rezeption in der Fachdidaktik an Hochschulen ge-

dacht. Sie sind auch als hilfreiches Hintergrundwissen für die Ausbildung von Lehrkräften an Seminaren oder für die Weiterbildung von Lehrkräften an Landesinstituten zu verstehen und sollen schließlich auch die Schuladministration und die Politik informieren.

Das hier vorliegende Positionspapier »Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen« ist das Ergebnis eines zweijährigen Entwicklungsprozesses. Nach einem Symposium der GDM im Februar 2019 wurde ein durch den GDM-Vorstand begleitetes Team von Expertinnen und Experten auf dem Gebiet »Umgang mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen« gebildet, das aus den jetzigen Autorinnen und Autoren des Positionspapiers bestand. Der Zwischenstand wurde von weiteren Expertinnen und Experten kritisch begutachtet und modifiziert. Das Endergebnis wurde allen Mitgliedern des initiierenden Symposiums vorgestellt und durch die aus dieser Runde eingehenden Rückmeldungen ein letztes Mal überarbeitet. Wir als Vorstand der GDM können nun mit einiger Berechtigung sagen, dass wir Ihnen ein Positionspapier der GDM anbieten können, das die mathematikdidaktische Expertise und das aktuelle mathematikdidaktische Wissen zum Umgang mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen enthält.

Der Vorstand der GDM
Andreas Eichler
Torsten Fritzlar
Daniela Götze
Katja Lengnink

Inhalt

| | | |
|-----|---|----|
| 1 | Gegenstand und Ziele des Papiers | 4 |
| 2 | Zum Begriff »Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen« | 4 |
| 3 | Zum Kern »Besonderer Schwierigkeiten beim Mathematiklernen« | 5 |
| 3.1 | Verständnis natürlicher Zahlen: Zahlvorstellungen und Zahlbeziehungen entwickeln und nutzen | 5 |
| 3.2 | Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems: Stellenwertbeziehungen erfassen und nutzen | 6 |
| 3.3 | Verständnis der Rechenoperationen: Operationsvorstellungen und -beziehungen erfassen und nutzen | 7 |
| 4 | Erfassen von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen | 7 |
| 4.1 | Prozessorientierte Erfassung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen | 7 |
| 4.2 | Standardisierte Erfassung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen | 8 |
| 4.3 | Häufigkeitsangaben für besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen | 9 |
| 5 | Prävention und Förderung | 9 |
| 5.1 | Zur Bedeutung früher mathematischer Bildung | 9 |
| 5.2 | Zur Bedeutung eines fördernden Mathematikunterrichts | 10 |
| 5.3 | Zur Bedeutung zusätzlicher Förderung von Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen | 12 |
| 5.4 | Mathematikangst | 13 |
| 5.5 | Zusammenarbeit mit den Eltern und den beteiligten Fachpersonen | 13 |
| 6 | Lernzielanpassungen und Nachteilsausgleich | 13 |
| | Quellen | 15 |

1 Gegenstand und Ziele des Papiers

Im Mathematikunterricht der Grundschule zeigt ein beträchtlicher Teil der Schüler/Innen (zur Häufigkeit siehe Abschnitt 4.3) gravierende Lernschwierigkeiten beim Erwerb des Basisstoffs der Arithmetik (zur näheren Erläuterung von »Basisstoff« siehe Abschnitt 3). Die Schwierigkeiten sind insofern »besondere«, als sie über einen längeren Zeitraum anhalten, den weiteren mathematischen Kompetenzaufbau erschweren und schließlich dazu führen, dass die betroffenen Schüler/Innen die Lernziele des Mathematikunterrichts in der Grundschule, und folglich auch in der Sekundarstufe, nicht erreichen.

Besondere Schwierigkeiten beim Lernen von Mathematik werden in verschiedenen Fachdisziplinen und auch innerhalb einzelner Disziplinen unterschiedlich bezeichnet. In medizinisch-psychologischen und sonderpädagogischen Zugängen wird in der Regel mit Begriffen wie »Rechenschwäche«, »Rechenstörung« oder »Dyskalkulie« gearbeitet (z. B. Jacobs & Petermann 2007; Lambert 2014; Moser Opitz 2013; Wissmann et al. 2013). In mathematikdidaktischen Publikationen findet man stattdessen oft Umschreibungen wie »besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen« (Kaufmann & Wessolowski 2006; Klewitz, Köhnke & Schipper 2008; Rechtsteiner-Merz 2013; Schipper 2009). Die unterschiedliche Wortwahl spiegelt Unterschiede im Verständnis wider, die jeweils durch spezifische theoretische Grundannahmen, Forschungsinteressen und Methoden gekennzeichnet sind und teilweise in unterschiedliche Aussagen und Handlungsempfehlungen münden.

Die Zugänge und Positionen innerhalb der deutschsprachigen Mathematikdidaktik sind Gegenstand des vorliegenden Papiers.

2 Zum Begriff »Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen«

Mit dem Begriff »besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen« werden im Folgenden gravierende und anhaltende Schwierigkeiten beim Erwerb zentraler Inhalte (s. Abschnitt 3) im Fach Mathematik bezeichnet. Diese Schwierigkeiten betreffen in erster Linie das Verständnis des arithmetischen Basisstoffs und führen im Laufe der Schuljahre dazu, dass die Schüler/Innen einen großen Leistungsrückstand gegenüber den Mitschüler/Innen aufweisen und langfristig weitere zentrale Kompetenzen im Fach Mathematik nicht erwerben können.

Die Umschreibung »besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen« wird aus folgenden Gründen gewählt:

- (1) Mathematische Lernschwierigkeiten betreffen stets einen spezifischen fachlichen *Lernbereich* und sind in der Auseinandersetzung mit mathematisch bedeutsamen *Lerninhalten* entstanden; sie weisen also eine *Lerngeschichte* auf. Die Suche nach möglichen Ursachen von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen muss aus fachdidaktischer Sicht alle Komponenten dieser Lerngeschichte einschließen. Durch die Umschreibung »besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen« soll eine einseitige, individualtheoretische Sichtweise vermieden werden, die Ursachen für Schwierigkeiten ausschließlich auf individuelle Faktoren zurückführt.
- (2) Zugleich verweist der Plural »Schwierigkeiten« auf die *Vielzahl* an Erscheinungsformen. Auch wenn sich eine Reihe von typischen Schwierigkeiten benennen lassen, die, vermittelt durch die stoffliche Hierarchie innerhalb der Grundschulmathematik, auch sachlogisch zusammenhängen, treten diese in sehr unterschiedlicher Ausprägung und Stärke auf. Zudem gelingt es manchen Schüler/Innen, einige dieser Schwierigkeiten bis zu einem gewissen Grad zu kompensieren (siehe Abschnitt 2 und 3).

Auf Begriffe wie »Rechenschwäche«, »Rechenstörung« oder »Dyskalkulie« wird bewusst verzichtet, da diese suggerieren können, dass es sich bei Schwierigkeiten beim Mathematiklernen um ein einheitliches Erscheinungsbild handelt, das einheitliche Maßnahmen erfordert.

Aus fachdidaktischer Perspektive sind im Zusammenhang mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen im Wesentlichen vier Themenbereiche maßgeblich, auf die im Folgenden näher eingegangen wird:

- die *differenzierte inhaltliche Bestimmung typischer Schwierigkeiten* in ihrem Bezug zu zentralen Inhalten der Grundschulmathematik (Abschnitt 3),
- die *möglichst frühzeitige und fachlich substanzielle Erfassung* von besonderen Schwierigkeiten im Mathematikunterricht (Abschnitt 4),
- die Frage, wie frühe mathematische Bildung im Kindergarten und guter Mathematikunterricht dem Entstehen von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen entgegenwirken können (Abschnitt 5.1 und 5.2),
- die *gezielte Förderung* von Schüler/Innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in und außerhalb der Klasse (Abschnitt 5.3–5.5).

3 Zum Kern »Besonderer Schwierigkeiten beim Mathematiklernen«

Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen manifestieren sich zunächst typischerweise in den drei zentralen Inhaltsbereichen des arithmetischen Basisstoffes, die das Mathematiklernen in der Grundschule kennzeichnen (Gerster & Schultz 2004; Schipper et al. 2011) und die sich auf das Mathematiklernen in der Sekundarstufe auswirken (Moser Opitz 2013):

1. *Verständnis natürlicher Zahlen:* Typisch für besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen ist ein Verständnis von Zahlen, das ordinal geprägt ist und bei dem die Zahlen als isolierte und aufeinanderfolgende Objekte betrachtet werden. Als Folge werden Beziehungen zwischen Zahlen nicht oder nur einseitig erkannt und die Ablösung von zählenden Strategien des Addierens und Subtrahierens wird erschwert (vgl. Abschnitt 3.1).
2. *Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems:* Typisch für besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sind Denk- und Vorgehensweisen, bei denen mehrstellige Zahlen in Ziffernfolgen aufgelöst werden. In weiterer Folge werden Zahlen in Rechenkontexten entlang von mechanisch eingeübten Regeln behandelt, was wiederum die Entwicklung des Verständnisses von dekadischen Strukturen negativ beeinflusst (vgl. Abschnitt 3.2).
3. *Verständnis der Rechenoperationen:* Typisch für besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sind einseitig zählende Vorgehensweisen beim Rechnen, teilweise ergänzt um regelgeleitetes Anwenden auswendig gemerkter Zahlenfakten. Dabei fehlen häufig bedeutungstragende Vorstellungen zu den Rechenoperationen, oder es werden nur Teilaspekte dieser Operationen erfasst (vgl. Abschnitt 3.3).

Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen betreffen somit *zentrale Lerninhalte der beiden ersten Schuljahre*, die von Schüler/innen als Voraussetzung für den weiteren arithmetischen Lernprozess grundlegend erfasst werden müssen. Fehlen diese, kann der aufbauend hinzukommende Stoff (z. B. Brüche, Dezimalzahlen, Prozentrechnen, elementare Algebra) – wenn überhaupt – nur als weitgehend unverstandenes Regelwerk gelernt werden. Die für besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen typischen Denkweisen, Defizite und Strategien, die sich im Grundschulalter zeigen, sind ebenso bei Jugendlichen in der Sekundarstufe anzutreffen (Krajewski & Ennemoser 2010; Moser Opitz 2013; Prediger et al. 2019).

Mathematikdidaktisch fundierte Hilfestellungen für Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in der Grund- wie in der Sekundarstufe fokussieren daher auf das Bearbeiten (bzw. nachträgliche Aufarbeiten) der drei zentralen Inhaltsbereiche des arithmetischen Basisstoffes (z. B. Moser Opitz et al. 2017; Prediger et al. 2019; Wartha 2009).

3.1 Verständnis natürlicher Zahlen: Zahlvorstellungen und Zahlbeziehungen entwickeln und nutzen

Ein tragfähiges Verständnis von natürlichen Zahlen fußt auf der Erkenntnis, dass Zahlen nicht ausschließlich ordinal als aufeinanderfolgende Positionen zu verstehen sind (ordinales Zahlkonzept), sondern ebenso Anzahlen (kardinales Zahlkonzept) repräsentieren und in Teilanzahlen zerlegt werden können (Teile-Ganzes-Konzept; z. B. Benz et al. 2015, Langhorst et al. 2011). Mit letzterem ist die Fähigkeit gemeint, »Zahlen als Zusammensetzung aus anderen Zahlen zu sehen« (Gerster & Schultz 2004, S. 339). Darauf aufbauend sind Relationen zwischen Zahlen mit Zahlen zu beschreiben und diese Relationen in Rechenoperationen zu nutzen (relationales Zahlkonzept). Entsprechende Einsichten sind Grundlage für den Aufbau von Verständnis für das dezimale Stellenwertsystem und für die Ablösung vom zählenden Rechnen. Aus der Anwendung assoziativer Teile-Ganzes-Beziehungen ergeben sich Alternativen zum zählenden Rechnen beim Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren. Dies ermöglicht bereits im einstelligen Bereich und auch bei Aufgaben mit Über- bzw. Unterschreitung der Zehn nicht-zählendes Rechnen. Auch bei größeren Zahlen und in anderen Zahlbereichen – wie z. B. bei der Erweiterung auf Brüche – ist es grundlegend, Teile eines Ganzen in Relation zueinander und zum Ganzen zu setzen.

Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen verfügen in der Regel über einseitige Vorstellungen zu Zahlen (Gaidoschik 2010; Gerster & Schultz 2004; Häsel-Weide 2016; Kaufmann 2003; Ostad 1997). Diese beruhen einerseits auf vielfältigen und wichtigen Zählerfahrungen und behindern andererseits durch die Dominanz einer auf das Zählen fokussierten Vorstellung alternative kardinale und darauf aufbauende relationale Zugänge. So wichtig es ist, dass Lernende flexibel vorwärts, rückwärts und in Schritten zählen können, kommt es in weiterer Folge insbesondere darauf an, dass sie Sicherheit über die strukturellen Zusammenhänge zwischen kardinal verstandenen Zahlganzen und ihren Teilen aufbauen. Eine Verfestigung des Zählens beim Rechnen behindert aber nicht allein den Blick auf operative Zusammenhänge beim Rechnen, es zieht auch weitere Probleme

nach sich: Zählstrategien sind – insbesondere, wenn sie versteckt ausgeführt werden – mit erhöhter Anstrengung und erhöhter Fehlerquote verbunden (Schäfer 2005; Torbeyns et al. 2004; Verschaffel et al. 2007b).

Mit Blick auf die *Prävention* von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen gehören zu den in diesem Bereich wesentlichen Inhalten des Mathematikunterrichts das Zerlegen von Anzahlen in zwei oder mehrere Teilanzahlen, das Vergleichen von Anzahlen, die Quantifizierung des Unterschieds zwischen zwei Anzahlen, die Nachbarzahl- und Verdopplungsrelationen sowie Bezüge zur 5 und 10. Dafür grundlegend sind das Identifizieren und Benennen von Strukturen auch in kleineren, simultan erfassbaren Mengen (≤ 5) und das quasi-simultane Erfassen größerer Mengen auf Basis von Strukturierungen bzw. (gedanklicher) Aufteilung in simultan erfassbare Teilmengen (Gaidoschik et al. 2017; Gaidoschik 2019a, 2019b; Gerster & Schultz 2004; Häsel-Weide 2016; Van de Walle et al. 2018).

3.2 Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems: Stellenwertbeziehungen erfassen und nutzen

Mit der Erkundung größer werdender Zahlen gewinnt das Stellenwertkonzept an Bedeutung für den Ausbau tragfähiger Zahlvorstellungen (langfristig auch für Dezimalzahlen und Größen) und für das operative Verständnis von Rechenwegen und -prozeduren (Fromme 2017; Heckmann 2006; Lambert & Moeller 2019; Moeller et al. 2011; Sprenger 2018). Die grundlegenden Teile-Ganzes-Beziehungen müssen auf dekadische Strukturzusammenhänge erweitert und zugleich systematisch vervielfältigt werden, indem Zahlen immer wieder in fortschreitende Bündel von 10 zerlegt bzw. aus solchen Bündeln zusammengesetzt gedacht werden (Gerster & Schultz 2004; Van de Walle et al. 2018). Die zum Aufschreiben der Zahlen verwendeten Ziffern werden dadurch Träger von mindestens zwei relevanten Informationen: Die Position der Ziffer repräsentiert einen bestimmten dekadischen Wert, die Ziffer selbst gibt die Anzahl der jeweiligen Elemente dieses Wertes (der an dieser Stelle notierten Bündelungseinheit) an. Veränderungen von Zahlen (Addieren, Subtrahieren, Verdoppeln, Halbieren, ...) können neue Bündelungen oder aber Entbündelungen nötig machen.

Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen lassen im Umgang mit zwei- und mehrstelligen Zahlen in der Regel kein oder ein nur eingeschränktes Verständnis des Bündelungsprinzips erkennen. Insbesondere Aufgaben, in denen Entbündelungen vorgenommen werden müssen, bereiten anhaltend Schwierig-

keiten. Zwei- und mehrstelligen Zahlen werden vorrangig als Aneinanderreihung von Ziffern gedacht, für deren Behandlung Regeln zu lernen sind (Fuson et al. 1997; Verschaffel et al. 2007a). Einige dieser Regeln werden zumeist (allerdings oft erst nach längeren Phasen der Unsicherheit) gelernt, so etwa die (in der deutschen Sprache besonders schwierigen) Regeln zur Übersetzung von Zahlwörtern in Ziffernfolgen und umgekehrt oder des stellungsgerechten Verknüpfens beim Addieren und Subtrahieren. Es dominiert aber oft das bedeutungsarme Manipulieren mit Ziffern, die Regeln bleiben mangels Anknüpfung ans Bündelungsprinzip unverbunden und auch deshalb anfällig für Verwechslungen. Zudem bemerken Lernende auf Grund unzureichend ausgebildeter Zahl- und Operationsvorstellungen Rechenfehler oft auch dann nicht, wenn diese für andere augenscheinlich sind (beispielsweise wenn das Ergebnis einer Subtraktion größer als der Minuend ist etc.).

Aus stoffdidaktischer Perspektive ist es nicht überraschend, dass Schüler/innen, die das dezimale Bündelungsprinzip nicht ausreichend erfasst haben, Schwierigkeiten insbesondere bei den Aufgaben haben, deren Lösung den Rückgriff auf dekadisch orientierte Zahlzerlegungen oder multiplikative Bezüge erfordern. Ebenso gelingt es den Lernenden in der Folge nur eingeschränkt, Aufgaben an nicht vorstrukturierten Zahlenstrahlen (z. B. Rechenstrich) zu bearbeiten, die eine Orientierung an Stellenwerten erfordern, oder Einsichten in schriftliche Algorithmen zu entwickeln. Auch erweisen sich Probleme, die viele Schüler/innen zunächst mit der inversen Sprechweise deutscher Zahlwörter haben (Vertauschen von Zehnern und Einern beim Schreiben von Zahlen mit Ziffern bzw. beim Lesen von in Ziffern notierten Zahlen, Folgeprobleme beim Rechnen), mitunter als sehr hartnäckig, wenn das Bündelungsprinzip und damit die Bedeutung der unterschiedlich positionierten Ziffern unklar sind (Gerster & Schultz 2004; Scherer & Moser Opitz 2010).

Wichtig für die *Prävention* von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen ist, dass Lernende zum einen tragfähige, reversible Vorstellungen von (fortgesetzten) Zehnerbündelungen entwickeln, zum anderen die darauf aufbauenden multiplikativen Beziehungen erkennen, auch über mehrere Stellenwerte hinweg. Zu den wesentlichen Inhalten im Mathematikunterricht gehören in diesem Bereich folglich, neben dem (als fortgesetztes Prinzip zu verstehenden) Bündeln und Entbündeln von Mengen und Anzahlen, vor allem auch Aufgaben, die den multiplikativen Zusammenhang zwischen Stellenwerten als Verzehnfachung bzw. Zehntelung, Verhundertfachung etc. thematisieren. Von übergeordneter Bedeutung bei der Behandlung mehrstelliger Zahlen ist das konsequente Einfordern des Begründens und Rückführens von Regeln auf die zuvor erarbeiteten Prinzipien des dezimalen Stellenwertsystems.

3.3 Verständnis der Rechenoperationen: Operationsvorstellungen und -beziehungen erfassen und nutzen

Das Rechnenlernen baut auf grundlegenden operativen Vorstellungen der Schüler/innen auf, die in unterschiedlichen Kontexten unterschiedliche Relevanz und Bedeutung erhalten. Diese operativen Vorstellungen können kardinale und ordinale Zahldeutungen sowie dynamische als auch statische Repräsentationen der Grundrechenarten umfassen und auf verschiedenen Repräsentationsebenen abgebildet werden (enaktiv, ikonisch, sprachlich, symbolisch; Bruner 1974), die Lorenz (2011) als Denkformate beschreibt. Von besonderer Bedeutung für die Ausbildung der operativen Vorstellungen sind der intra- und intermodale Transfer, also das Herstellen der Beziehungen innerhalb einzelner und zwischen den Repräsentationsebenen und der flexible Wechsel zwischen diesen (Bönig 1995; Götze 2019a, 2019c; Kuhnke 2013; Royar 2013). Operative Vorstellungen sind für das Rechnen auch insofern relevant, als sie unterschiedliche Wege der Lösungsfindung eröffnen sowie die Einsicht in Termbeziehungen und -umformungen grundlegen.

Wenn die Zahlzerlegungen bis inklusive der Zehn nicht vollständig automatisiert wurden und bereits automatisierte Aufgaben nicht für Ableitungen genutzt werden können, bleibt den Schüler/innen ausschließlich das Zählen als einzig verfügbares Lösungswerkzeug, neben dem Abruf bereits automatisierter Rechenaufgaben. Die Automatisierung ihrerseits wird aber durch die dauerhafte Praxis des zählenden Rechnens zumindest erschwert (Gaidoschik 2010). Zwar erwerben auch Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen im Laufe der Jahre in der Regel ein Repertoire an Aufgaben, die abgerufen werden können. Sie automatisieren aber die Basisaufgaben des Einspluseins und Einmaleins oft bis ans Ende der Grundschulzeit und darüber hinaus nicht lückenlos (Moser Opitz 2013). Sie erleben dann das schriftliche Addieren und Subtrahieren zumeist als wesentliche Erleichterung, da die rechnerischen Anforderungen dabei Stelle für Stelle auf den Zahlenraum bis 20 reduziert und auch zählend bewältigt werden können (mit allen oben genannten Schwierigkeiten). Es gelingt den Lernenden aber oft nicht, ein Verständnis für den Algorithmus und ein Bewusstsein für eine aufgabenadäquate Verwendung von Algorithmen und halbschriftlichen Rechenwegen zu entwickeln (Gerster 2017).

Für die *Prävention* von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen ist es wichtig, dass Lernende über Basisfakten und strategische Werkzeuge verfügen. Dabei ist die Entwicklung eines Repertoires an automatisierten Aufgaben eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung. Die grundlegende Voraussetzung dafür,

dass Schüler/innen zählendes Rechnen zunehmend zugunsten des Abrufs bzw. der Anwendung automatisierter Basisfakten (v. a. kleines Einmal- und Einspluseins sowie deren Umkehraufgaben) aufgeben, ist ihr Verständnis für Beziehungen und Zusammenhänge von Zahlen und Aufgaben (Gaidoschik et al. 2017; Häsel-Weide 2016; Rechtsteiner-Merz 2013; Van de Walle et al. 2018). Darüber hinaus ist es bedeutsam, dass die Lernenden »operative Grundstrategien« (Schipper 2009) bzw. »strategische Werkzeuge« (Rathgeb-Schnierer 2006) zum Lösen jener Aufgaben entwickeln, die (noch) nicht zu den Basisfakten gehören, und diese Aufgaben durch Ausnutzung kommutativer, assoziativer und distributiver Beziehungen so verändern, dass die Aufgaben sich auf bekannte Aufgaben zurückführen und von diesen ableiten lassen (Rechtsteiner & Rathgeb-Schnierer 2017).

4 Erfassen von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

Zur Erfassung und Beschreibung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen lassen sich zwei grundlegend verschiedene Zugänge unterscheiden, die jeweils spezifische Fragen fokussieren, verschiedene Ziele verfolgen und sich auf unterschiedliche Methoden stützen.

4.1 Prozessorientierte Erfassung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

Aus fachdidaktischer Perspektive stehen bei der Erfassung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen die individuellen Vorstellungen, Denk- und Herangehensweisen mit Blick auf den mathematischen Basisstoff im Vordergrund. Eine in dieser Hinsicht *prozessorientierte* Erfassung der Vorstellungen, Denk- und Herangehensweisen bezogen auf die drei zentralen Inhaltsbereiche (s. Abschnitt 3) ermöglicht differenzierte Einblicke in den Lernstand eines Kindes, seine Kompetenzen und Defizite, und ist damit eine grundlegende Voraussetzung für adäquate individuelle Förderung (Götze et al. 2019). Diese Erfassung von Lernständen kann in den Unterricht integriert werden oder außerhalb des Unterrichts z. B. in Form von diagnostischen Interviews erfolgen (Bräuning & Nührenböcker 2010; Bräuning & Schülke 2010; Gerster & Schultz 2004; Hengartner 1999; Selzer & Spiegel 1997; Winter 2015; Wollring 2004).

Prozessorientierte Lernstanderhebungen sind für Lehrkräfte deshalb von hoher Bedeutung, weil sie in besonderer Weise die Möglichkeit einer Orientierung an den individuellen Lernprozessen der Schüler/innen bieten und den Lernenden inhaltliche Anlässe liefern, ihre Kompetenzen und Zugänge über einen längeren Zeitraum deutlich zu machen. Dafür bieten sich fokussierte Lerngespräche im Sinne prozessorientierter Interviews an, oder aber auch (mehr oder weniger informelle) schriftliche Standortbestimmungen. Für letztere eignen sich vor allem Formate, die nicht nur inhaltliche, sondern auch spezifische prozessbezogene Kompetenzen erheben. Dies kann anhand von offenen und strukturorientierten Aufgaben erfolgen, die den Lernenden vielfältige Gelegenheiten bieten, ihre individuellen mathematischen Perspektiven zur Bearbeitung der Aufgaben offen zu legen, indem sie ihre eigenständig entwickelten Lösungswege verbalisieren und darstellen. Werden diese Eigenproduktionen der Lernenden mit Blick auf das zu erreichende Lernziel interpretiert, ergeben sich daraus für die Lehrkraft mögliche Anknüpfungspunkte für die Anregung weiterer Lernprozesse.

Treten bei einem Kind besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen auf, bietet sich ein diagnostisches Interview zur prozessorientierten Lernstanderhebung außerhalb des regulären Unterrichts an. Grundlegendes Ziel ist hierbei, einen differenzierten und qualitativ fundierten Ein- und Überblick in die individuellen Fähigkeiten und Fertigkeiten, bezogen auf die drei zentralen Inhaltsbereiche des arithmetischen Basisstoffs (s. Kap. 3) zu bekommen, um darauf aufbauend individuell passende Förderaktivitäten zu entwickeln. Diese diagnostischen Interviews können entweder von der Klassenlehrkraft oder von einer externen Person durchgeführt werden.

Für die prozessorientierte Erfassung von Lernständen wurden seitens der Fachdidaktik eine Reihe von Vorschlägen ausgearbeitet und veröffentlicht. Dabei handelt es sich, ihrer Zielsetzung entsprechend, um Aufgabensammlungen und Leitfäden unterschiedlicher Standardisierung für das Führen diagnostischer Interviews (z. B. Kaufmann & Lorenz 2006; Kaufmann & Wessolowski 2006; Kwapis et al. 2018; Peter-Koop et al. 2007; Häsel-Weide & Nührenbörger 2017; Häsel-Weide et al. 2017, 2018, 2019; Link et al. 2019; Scherer 1999, 2003, 2005; Schmassmann & Moser Opitz 2007, 2008a, 2008b, 2011; Sundermann & Selter 2006; Selter u. a. 2014). In ihrer Intention, die Denk- und Handlungsweisen der Lernenden zu erfassen und damit Aufschluss über die Ursachen von Fehlkonzepten zu bekommen, unterscheiden sie sich grundlegend von standardisierten Testverfahren.

4.2 Standardisierte Erfassung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

Der Einsatz von standardisierten Instrumenten zur Erfassung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zielt darauf ab, mathematische Kompetenzen einzelner Schüler/innen mit einer Normstichprobe zu vergleichen. Standardisierte Instrumente finden vor allem in quantitativ ausgerichteten empirischen Studien Verwendung und werden oftmals eingesetzt, wenn öffentliche Stellen Entscheidungen über Ressourcen für eine besondere Unterstützung oder über Nachteilsausgleiche aussprechen. Sie können auch als Screening genutzt werden, um einzelne Schüler/innen einer Klasse zu identifizieren, deren mathematische Kompetenzen in weiterer Folge mittels prozessorientierter Lernstanderhebungen differenzierter und umfassender ermittelt werden sollen.

Wenn standardisierte Tests zum Einsatz kommen, um beispielsweise Erkenntnisse zum Leistungsstand von Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zu gewinnen, ist die inhaltliche und die psychometrische Qualität der Tests zentral (Moser Opitz & Ramseier 2012). Aus fachdidaktischer Sicht müssen standardisierte Tests folgende Kriterien erfüllen:

- *Erfassung der zentralen Inhalte des basalen Lernstoffs:* Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zeigen sich, wie dargestellt, vor allem in zentralen Inhalten des arithmetischen Basisstoffs und damit verbunden (z. B. vermittelt über die operativen Vorstellungen zu den Rechenoperationen) im Bereich des Sachrechnens. Deshalb müssen Tests eingesetzt werden, mit denen diesbezügliche Kompetenzen erfasst werden.
- *Orientierung am Lehrplan bzw. an den im Unterricht erarbeiteten Inhalten:* Tests zur Erfassung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sollten Inhalte überprüfen, die laut Lehrplan erarbeitet werden müssen und die im Unterricht erarbeitet worden sind.
- *Orientierung an im Unterricht verwendeten Aufgabenformaten und Veranschaulichungen:* Testaufgaben sollten so gestaltet sein, dass die verwendeten Veranschaulichungen und Arbeitsmittel fachdidaktisch korrekt und den getesteten Schüler/innen bekannt sind. Das betrifft auch das Testformat. Wenn z. B. Testaufgaben am Computer bearbeitet werden, sollte sichergestellt werden, dass der Umgang mit dem Rechner das Testergebnis nicht beeinflusst.
- *Erfüllung psychometrischer Anforderungen:* Standardisierte Tests zur Erfassung von besonderen

Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sollten die gängigen psychometrischen Kriterien erfüllen, die im jeweiligen Manual ausführlich dokumentiert sind: Reliabilität des Tests oder der einzelnen Skalen, Itemanalysen (Trennschärfe, Item-Fit bei einer Raschskalierung) sowie Faktorenanalysen, wenn der Test verschiedene Subtests enthält. Zudem muss die Stichprobe differenziert beschrieben sein.

Werden standardisierte Tests verwendet, ist zu beachten, dass die Setzung von Grenzwerten (und damit verbunden auch die für Lernschwierigkeiten ermittelte Häufigkeit, vgl. Abschnitt 4.3) letztlich immer willkürlich ist bzw. von den verwendeten Kriterien und Normen abhängt. Mazocco (2005) hat z. B. aufgezeigt, dass die Leistungen der als rechenschwach bezeichneten Schüler/innen je nach Studie und je nach verwendetem Grenzwert zwischen dem 10ten und 35sten Perzentil liegen. Nach Swanson und Jerman (2006) reicht das Spektrum sogar vom 8ten zum 48sten Perzentil.

Weiter ist zu beachten, dass sich hinsichtlich der Berücksichtigung des Intelligenzquotienten bei der Diagnose von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in den letzten Jahren Veränderungen ergeben haben. In der ICD-10 und in der diagnostischen Praxis wurde und wird häufig noch das Intelligenz-Diskrepanzkriterium berücksichtigt (Diskrepanz von mind. 1,2 bis 2 Standardabweichungen zwischen den Mathematikleistungen und dem mit einem Test ermittelten IQ). Mittlerweile hat sich gezeigt, dass sich Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen, die das Diskrepanzkriterium erfüllen, hinsichtlich ihrer mathematischen Konzepte nicht von solchen unterscheiden, die dieses Kriterium nicht erfüllen (Ehlert et al. 2012). Von einer Verwendung dieses Kriteriums ist somit abzusehen.

4.3 Häufigkeitsangaben für besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

In der S3 Leitlinie der Deutschen Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie (2018) wird als »Prävalenz der Rechenstörung« mit Verweis auf internationale Studien »ungefähr zwei bis acht Prozent« angegeben. In diesen Zahlen spiegelt sich allerdings im Wesentlichen nur wider, wie »Rechenstörung« in den jeweiligen Studien definiert wurde: Bei normalverteilten Merkmalen liegen unterhalb von zwei Standardabweichungen vom Mittelwert rund 2,5 Prozent einer Population. Bei Festlegung eines »strengen« Diagnosekriteriums von zwei Standardabweichungen von der Altersnorm für die Zuerkennung einer Rechenstörung (s. o.) ist also eine Häufigkeit im Bereich von

zwei Prozent zu erwarten. Bei Festlegung des Cut-offs auf 1,5 Standardabweichungen erhöht sich die Häufigkeit von »Rechenstörungen« auf sechs bis sieben Prozent.

Der prozentuale Anteil von Schüler/innen, die nach fachdidaktischem Verständnis besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (vgl. Kap. 2) zeigen und daher besondere Maßnahmen in Unterricht und Förderung (vgl. Kap. 5) benötigen, kann somit allenfalls grob geschätzt werden

5 Prävention und Förderung

Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen entwickeln sich an zentralen Inhalten des Mathematikunterrichts der Grundschule. *Förderung* muss an diesen Inhalten ansetzen und produktive Anregungen bieten. Empirische Studien zeigen, dass eine solche Förderung auch wirksam ist (Moser Opitz et al. 2017; Wissmann et al. 2013). Diese Förderung muss stets mit dem Unterricht verzahnt bzw. nach Möglichkeit in den Unterricht integriert erfolgen. Dies ist auch wichtig bei besonders stark ausgeprägten Schwierigkeiten, die zusätzlich zum Unterricht weitere Fördermaßnahmen erfordern, um nachhaltig und gezielt die Aneignung des Basisstoffs zu unterstützen. Förderung muss somit, ob unterrichtsintegriert oder unterrichtsergänzend, immer am Basisstoff, produktiv, am Fach und am Kind ausgerichtet sein.

Mathematikunterricht und mathematische Förderung sollten durchgängig auch *präventiv* ausgerichtet sein, um das Entstehen bzw. die weitere Entwicklung von besonderen Schwierigkeiten zu vermeiden bzw. zu vermindern. Das erfordert, dass die Lehrkräfte geeignete Vorgehensweisen kennen und einsetzen bzw. wissen, welche Form der Unterstützung für Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen geeignet sind (Montague 2011). Beispielsweise kann die Fokussierung auf die strukturierte Anzahlerfassung und Zahl- und Operationsbeziehungen zählendem Rechnen vorbeugen (z. B. Gaidoschik et al. 2017; Häsel-Weide 2016; Reichtsteiner & Rathgeb-Schnierer 2017).

Wichtig ist zudem, dass Prävention nicht erst im ersten Schuljahr, sondern schon in der vorschulischen Bildung beginnt.

5.1 Zur Bedeutung früher mathematischer Bildung

Kinder, die zu Schulbeginn geringe numerische Kompetenzen aufweisen, tragen ein erhöhtes Risiko dafür, in der

Schulzeit besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zu entwickeln (z. B. Dornheim 2008; Jordan et al. 2007; Krajewski & Schneider 2009). Der Anregung der Entwicklung von mengen- und zahlbezogenen Kompetenzen in Institutionen der vorschulischen Bildung kommt deshalb eine hohe Bedeutung zu. In der Mathematikdidaktik wurden im letzten Jahrzehnt inhaltlich und didaktisch fundierte Konzepte für die frühe mathematische Bildung entwickelt und empirisch evaluiert.

Untersuchungen zur Wirksamkeit spezifischer Fördermaßnahmen zeigen positive Effekte – wenn auch nicht für alle Kinder bei denselben Inhalten im selben Maß – sowohl für das Aufgreifen alltagsbedeutsamer mathematischer Situationen (Gasteiger 2010), die Integration mathematischer Regelspiele (Jörns et al. 2014; Tubach 2019; Vogt et al. 2018), als auch für spezifische Trainingsmaßnahmen (z. B. Krajewski et al. 2008; Vogt et al. 2018).

Aus fachdidaktischer Perspektive ist bedeutsam, dass die Besonderheiten des Lernens von Kindergartenkindern berücksichtigt werden und die mathematische Förderung in alltags- und spielbezogene Situationen integriert wird sowie individuelle Anpassungen mit Blick auf die Kinder zulässt (Gasteiger 2010, 2015; Schuler 2013; van Oers 2010). Eine solche Förderung kann jedoch nur wirksam sein, wenn die Fachkräfte die Kinder gezielt begleiten (Gasteiger 2015; van Oers 2013; Wullschleger 2017). Fachdidaktisch fundierte mathematische Bildungsarbeit im Kindergarten erfordert somit neben tragfähigen Konzepten (z. B. Benz 2010; Benz et al. 2015; Bönig et al. 2017; Hauser et al. 2015; Royar & Streit 2010; Schuler et al. 2017; Wittmann 2016) deren Dissemination in Aus- und Fortbildung zur Professionalisierung der Fachkräfte (Gasteiger et al. 2019; Kucharz et al. 2014).

5.2 Zur Bedeutung eines fördernden Mathematikunterrichts

In der deutschsprachigen Fachdidaktik und darüber hinaus herrscht weitgehend Konsens darüber, dass insbesondere im Mathematikunterricht des ersten und zweiten Schuljahrs großes Potenzial zur Vermeidung von besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen liegt. Zur Ausschöpfung dieses Potenzials bedarf es gezielter Maßnahmen zur Unterstützung von Schüler/innen, bei denen sich besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen abzeichnen (z. B. Gaidoschik 2012, 2019a, 2019b; Häsel-Weide & Nührenbörger 2012, 2013; Häsel-Weide et al. 2013; Lorenz & Radatz 1993; Rechtsteiner-Merz 2013; Scherer 1999, 2003, 2005; Selter et al. 2014; Wartha et al. 2019). Diese können aber nur greifen, wenn sich der Mathematikunterricht für alle Schüler/innen an einigen grundlegenden didaktischen Prinzipien orientiert:

Durchgehende Verstehensorientierung: Aus fachdidaktischer Perspektive wird Mathematik als »Wissenschaft von den Mustern« verstanden (z. B. Steinweg 2013; Wittmann 2003). Für das Mathematiklernen in der Grundschule folgt daraus der Anspruch, dass Schüler/innen in allen Inhaltsbereichen Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten erkennen, erforschen, weiterführen und nach Möglichkeit begründen lernen sollen (Devlin 1994, 2002; Götze 2019b; Lüken 2012; Wittmann & Müller 2007a). Vor diesem Hintergrund ist beispielsweise Rechnen als das Erkennen und geschickte Nutzen von mathematischen Zusammenhängen zur Lösungsfindung zu verstehen. Wollte man Schüler/innen rechnerische Kompetenzen ohne Einsicht in arithmetisch-algebraische Strukturen beibringen, widerspräche dies nicht nur Grundideen mathematischer Bildung (Van de Walle et al. 2018), sondern auch den empirischen Hinweisen, dass gerade der Erwerb von Einsicht in grundlegende Strukturen der Arithmetik (v. a. Teile-Ganzes- und Stellenwertbeziehungen, relationale Beziehungen und Rechengesetze) für die Ablösung vom zählenden Rechnen zentral ist (Gaidoschik 2010; Rechtsteiner-Merz 2013). Ohne solche Einsicht haben Schüler/innen nur die Möglichkeit, Aufgaben zählend und/oder durch mechanisches Anwenden gelernter Regeln und automatisierter Rechensätze zu lösen (Götze 2019a). Sowohl das Zählen als auch das isolierte, unverstandene Merken von Regeln und Rechensätzen führt aber schnell zu Überforderung und fehlerhafter Nutzung (Gaidoschik 2007; Häsel-Weide 2016).

Prinzip des aktiv-entdeckenden Lernens: Verstehen basiert auf einem aktiven Konstruktionsprozess der Lernenden, bei dem der neue Lerninhalt mit vorhandenem Wissen verknüpft und so in das bestehende Wissensnetz eingefügt werden muss (Schütte 2008; Winter 2016). Mathematiklernen ist nicht dadurch möglich, dass lediglich Regeln oder Rezepte angewendet werden. Dies gilt insbesondere auch für Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (z. B. Moser Opitz 2008; Scherer 1995; Ratz 2009). Diese profitieren nachweislich von der Herausforderung, selbstständig nach Lösungen für Probleme zu suchen, die allerdings in ihrer individuellen Zone der nächsten Entwicklung liegen. Die anspruchsvolle Aufgabe der Lehrkraft besteht daher darin, passende Aufgaben- und Problemstellungen bereitzustellen, deren Bearbeitung kompetent zu begleiten und damit günstige Rahmenbedingungen für aktiv-entdeckendes Lernen zu schaffen (Wittmann 1995, 2015). Für Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen ist eine Begleitung in besonderer Weise erforderlich, beispielsweise wenn es um die Sicherung der gefundenen (Teil-)Lösungen geht: Hier bedarf es oft besonderer Anstöße zur Reflexion, Hilfen bei der Einordnung und beim Herstellen von Bezügen zu bereits Gelerntem. Insofern benötigen Schüler/in-

nen, die besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zeigen, mehr kognitiv aktivierende *Begleitung* beim aktiv-entdeckenden Lernen, ohne dass diese ihnen die *eigenständige* Auseinandersetzung mit einem mathematischen Sachverhalt abnimmt (Haruehansawasin & Kiattikomol 2018).

Prinzip des ganzheitlichen Lernens: Verständnisbasiertes Lernen wird erschwert, wenn fachliche Struktureinheiten aufgelöst und der Inhalt nach dem »Prinzip der kleinsten Lernschritte« zerlegt wird (Scherer 1995; Schütte 1994). Beispielhaft seien genannt:

- Wenn das erste Rechnen auf kleinste Zahlabschnitte (z. B. jede Zahl einzeln und insgesamt erst einmal nur die Zahlen bis sechs) begrenzt wird, so kann dies den Schüler/innen erschweren, arithmetische Zusammenhänge und Strukturen als bedeutsam zu erleben und zu verstehen.
- Wenn das Erkunden von und Rechnen mit mehrstelligen Zahlen künstlich begrenzt wird (z. B. bis 30, bis 50 ...), werden die Einsicht in das Bündelungsprinzip und die Entwicklung flexiblen Rechnens erschwert.
- Wenn beim Erlernen des Einmaleins einzelne Malreihen isoliert behandelt werden, behindert dies das Verständnis von operativen Zusammenhängen zu Kernaufgaben.

Ganzheitliches Lernen im Fach Mathematik meint, dass Einsichten in mathematische Zusammenhänge – mit Blick auf das Ganze – gezielt erarbeitet werden. Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen benötigen beim aktiven Erkunden von ganzheitlichen Kontexten eine kompetente Lernbegleitung, um die Zusammenhänge erschließen und damit die Grundlagen für verständnisbasiertes Lernen erwerben zu können (Scherer & Moser Opitz 2010).

Unterstützung beim Aufbau von Basisfakten: Der hier wiederholt betonte Primat von Verstehen und Einsicht muss einhergehen mit dem Automatisieren von Einspluseins, Einmaleins und der entsprechenden Umkehraufgaben (z. B. Schipper 2009). Diese sind notwendig, um auf höherer Stufe mathematisch aktiv werden zu können (Wittmann & Müller 2007b). Verstehen ist eine günstige Bedingung für das Automatisieren, dafür aber noch nicht hinreichend. Verstandene Zusammenhänge müssen ausreichend oft in produktiven Übungsformaten angewendet werden, um mit der nötigen Sicherheit, Schnelligkeit und Leichtigkeit abgerufen werden zu können. Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zeigen gerade auch in diesem Bereich oft Probleme (z. B. Geary et al. 2012). Sie benötigen mehr

Zeit, mehr Wiederholungsschleifen und mehr gezielte Begleitung bei der Automatisierung. Oft besteht das Problem auch darin, dass automatisiert wird, bevor etwas verstanden ist. Konkret bedeutet dies: (1) sicherstellen, dass die Verständnisgrundlage vorhanden ist, bevor (2) Übungsphasen anhand produktiver Aufgaben anschließen, die auf die individuellen Probleme abgestimmt sind, und die ergänzt werden um (3) kurze, aber regelmäßige Phasen des gezielt automatisierenden Übens der verstandenen Konzepte und Strategien auf Basis einer (4) kontinuierlichen fachkundigen Begleitung, die Konzepte und Fehlkonzepte erkennt und dementsprechend Impulse zur Reflexion und Weiterarbeit geben kann (z. B. Baroody 2006; Gaidoschik 2019a, 2019b; Gerster 2017; Wittmann & Müller 2007b).

Einsatz von Arbeits- und Veranschaulichungsmitteln als Verstehenshilfe: Material und Veranschaulichungen zur Repräsentation arithmetischer Sachverhalte haben eine wichtige Funktion im Lernprozess (z. B. Lorenz 1992). Sie stellen einerseits Hilfsmittel für die Lösungsfindung dar, andererseits Mittel zum Erkennen und zur Darstellung arithmetisch-algebraischer Strukturen (Kuhnke 2013; Söbbeke 2005; Steinbring 1994). Daher ist es wichtig, dass die Arbeitsmittel und Veranschaulichungen grundlegende Strukturelemente enthalten (Steenpaß & Steinbring 2014).

Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen benötigen in der Regel mehr Zeit und intensivere Unterstützung, um ein Arbeits- und Veranschaulichungsmittel so zu verstehen, dass sie es dann als Hilfe für die Erarbeitung weiterer Strukturen nutzen können. Im Lernprozess wird langfristig die Ablösung von den konkret vorliegenden Arbeitsmitteln angestrebt. Gleichwohl meint »Ablösung vom Material« nicht Aufgeben des Materials. Das Arbeits- und Veranschaulichungsmittel dient immer auch als Kommunikationsmedium, um daran Lösungswege für Mitlernende sichtbar zu machen. Wenn aber ein Kind zur *Lösungsfindung* von Routineaufgaben dauerhaft auf Arbeits- und Veranschaulichungsmittel angewiesen ist, lässt das den Rückschluss zu, dass die angestrebten Einsichten noch nicht gewonnen wurden. In solchen Situationen ist es Aufgabe der Lehr- oder Förderlehrkraft, diese Einsichtsprozesse aktiv zu begleiten und zu unterstützen. Ein wichtiger Teil dieser Begleitung besteht darin, zu den Handlungen am Arbeitsmittel begleitende Versprachlichungen anzuregen, die mentale Vorstellung in Verbindung mit der Handlung sowie das sprachliche Vorwegnehmen von (Teilen von) Handlungen herauszufordern und schließlich die Handlung am Arbeits- und Veranschaulichungsmittel durch das nun möglich gewordene Handeln in der Vorstellung und durch die damit verbundenen mathematischen Begriffe zu ersetzen (z. B. Schipper et al. 2011; Wartha & Schulz 2012; Wartha et al. 2019).

Lernen im Diskurs: Im arithmetischen Lernprozess besteht eine wesentliche Aufgabe der Lehrkraft darin, die Schüler/innen zum inhaltsbezogenen Kommunizieren und Argumentieren über ihr mathematisches Tun anzuregen, denn mathematisches Verstehen ist angewiesen auf interaktive Verständigung (Steinbring 2005). Wenn Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen das Verbalisieren ihrer Vorstellungen, Lösungswege und Gedanken schwerfällt, sollte dies nicht zum Anlass genommen werden, in Förder- und Lernsituationen auf das Kommunizieren oder Argumentieren zu verzichten. Vielmehr sind manche dieser Schüler/innen in besonderer Weise auf das verbale Begleiten der Lernprozesse und das »laute Denken« (Montague 2011; Moser Opitz & Schindler 2021) bzw. den Diskurs im Mathematikunterricht (Meyerhöfer 2018) angewiesen. Für den Mathematikunterricht sind geeignete Aufgaben essentiell, die Anlässe bieten, sich auszutauschen und die das Sprechen über mathematische Begriffe und Zusammenhänge herausfordern. Die Versprachlichung von mathematischen Zusammenhängen und Vorgehensweisen schafft Bewusstheit über die eigenen numerischen und operativen Vorstellungen und eröffnet Lernchancen zur Strukturierung des mathematischen Verständnisses (Nührenbörger & Steinbring 2009; Nührenbörger & Schwarzkopf 2019; Rathgeb-Schnierer 2010; Tiedemann & Rottmann 2019).

Die Bedeutung des Lernens im Diskurs spricht auch für einen natürlich differenzierenden gemeinsamen Gegenstand. Formen der »Differenzierung«, die durch Zuweisung von Aufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit und unterschiedlichen Inhalts zur ausschließlichen Individualisierung führen, bieten keine Möglichkeit zum Erkennen grundlegender mathematischer Zusammenhänge. Die Mathematikdidaktik hat in den letzten Jahrzehnten eine Fülle von substanziellen Aufgaben und Lernumgebungen entwickelt, die Differenzierung bei Bewahrung eines gemeinsamen fachlichen Lerngegenstandes ermöglichen (z. B. Hengartner et al. 2006; Hirt & Wälti 2007; Krauthausen & Scherer 2014; Nührenbörger & Pust 2006; Rasch 2007; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2018; Schütte 2008; Scherer 1999, 2003, 2005; Wittmann & Müller 2017, 2018). Angebote zur natürlichen Differenzierung sollten auch für Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen bereitgestellt werden. Dabei ist jedoch zu beachten, dass die Erarbeitung des mathematischen Basisstoffes stets adaptive, (diagnosegeleitete) individuelle Begleitung durch die Lehrkraft und damit verbunden ergänzende Aufgaben zur individuellen Vertiefung oder Fokussierung erfordert (Moser Opitz et al. 2018).

5.3 Zur Bedeutung zusätzlicher Förderung von Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen

Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen entwickeln sich an zentralen Inhalten des Mathematikunterrichts der Grundschule und können in diesem frühzeitig erkannt werden. Schon deshalb ist der Mathematikunterricht auch der *erste* Ort, in dem mit diesen Schwierigkeiten sinnvoll – im Sinne der betroffenen Schüler/innen – umgegangen werden muss. Fachdidaktische Forschung und Entwicklung liefern zahlreiche Hinweise und Anregungen dafür, wie Unterricht gestaltet werden sollte, um auch Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen im Klassenverband produktiv zu fördern (z. B. Fritz et al. 2017; Gaidoschik 2012; Häsel-Weide et al. 2013; Häsel-Weide & Nührenbörger 2012, 2013; Lorenz & Radatz 1993; Scherer & Moser Opitz 2010; Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2017; Rechtsteiner-Merz 2013; Schipper 2009; Selter et al. 2014; Wartha & Schulz 2012).

Stoffdidaktische Analysen (Wittmann 2015) und empirische Studien liefern allerdings deutliche Hinweise dafür, dass eine ausschließlich klassenintegrierte Förderung für Schüler/innen mit sehr großen Schwierigkeiten nicht ausreichend ist (Moser Opitz et al. 2018; Stöckli 2019). Es bedarf zusätzlicher Maßnahmen, die von einer auf sich alleine gestellten Lehrperson auch bei hoher Kompetenz im Klassenverband nicht geleistet werden können. Mehr und bessere Möglichkeiten ergeben sich bei Unterstützung der Klassenlehrkraft durch eine zusätzliche Fachperson, die für diese Aufgaben qualifiziert ist. Die Durchführung gezielter Fördermaßnahmen für einzelne Schüler/innen kann dann – je nach lokalen Gegebenheiten – unterschiedlich organisiert werden. Eine Möglichkeit besteht darin, dass im Rahmen des Regelunterrichts die zweite Fachperson eine Gruppe oder einzelne Schüler/innen in besonderer Weise begleitet. In Phasen des gemeinsamen Arbeitens aller Schüler/innen an natürlich differenzierenden Aufgaben (siehe Abschnitt 5.2) unterstützt sie diese, in weiteren Phasen arbeitet sie mit ihnen den mathematischen Basisstoff auf, während die Mitschüler/innen sich anderen Aufgaben widmen. In vielen Fällen wird auch (zusätzlich zu den oben beschriebenen Maßnahmen) eine Förderung außerhalb des Klassenverbands und zusätzlich zum Regelunterricht notwendig und sinnvoll sein (Ise et al. 2012). Wichtig ist jedenfalls in jeder organisatorischen Umsetzung, dass diese Förderung gemäß den in Abschnitt 5.2 beschriebenen Merkmalen von gutem Mathematikunterricht erfolgt, dass auf die Lernbedürfnisse der Schüler/innen Rücksicht genommen wird und dass unterrichtsbegleitende schulische sowie gegebenenfalls auch außerschulische Unterstüt-

zungsmaßnahmen fachlich sinnvoll aufeinander abgestimmt sind.

5.4 Mathematikangst

Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen erleben sich früh als mathematisch inkompetent und unfähig, die an sie gestellten Anforderungen zu erfüllen. Das kann zu Mathematikangst führen bzw. diese verstärken (Devine et al. 2018). Allerdings zeigt sich Mathematikangst auch bei Schüler/innen mit guten und sehr guten mathematischen Leistungen und kann somit nicht als spezifisches Merkmal von Lernenden mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen bezeichnet werden (ebd.; Krinzing et al. 2009). Heute wird davon ausgegangen, dass der Zusammenhang zwischen Mathematikleistung und Mathematikangst reziprok ist (Carey et al. 2016). Das heißt, dass schlechte Mathematikleistungen zu Mathematikangst führen können, dass aber auch Mathematikangst die mathematischen Leistungen beeinflussen kann. Grundsätzlich ist Mathematikangst eine ungünstige Bedingung für das weitere mathematische Lernen (Mutlu 2019; Sorvo et al. 2017), und es ist insbesondere für Schüler/innen mit Schwierigkeiten beim Mathematiklernen, die Mathematikangst zeigen, wichtig, dass entsprechende Maßnahmen getroffen werden. Diese müssen – je nach Situation – auf unterschiedlichen Ebenen ansetzen. Wichtig ist, dass zuerst im Gespräch mit den Betroffenen analysiert wird, ob und in welchen Situationen die Mathematikangst vor allem auftritt (z. B. in Prüfungssituationen, in Mathematikstunden generell). Hinsichtlich der mathematischen Förderung haben Ergebnisse aus einer Interviewstudie mit Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen (Moser Opitz 2013) gezeigt, dass vermehrtes, wiederholendes Üben der gleichen Inhalte ohne spezifische Unterstützung oft mit Misserfolgserlebnissen verbunden war wie auch mit der Erfahrung, dass sich vermehrte Anstrengung nicht lohnt. Wichtig ist somit, dass – wie zuvor dargestellt – kompetente Unterstützung angeboten wird, um bestehende Lücken im mathematischen Basisstoff gezielt aufzuarbeiten. Es kann zudem angezeigt sein, den betroffenen Schüler/innen zusätzlich psychologische Unterstützung anzubieten.

5.5 Zusammenarbeit mit den Eltern und den beteiligten Fachpersonen

Wenn bei Schüler/innen besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen vorliegen, ist eine gute Zusammenarbeit der Bezugspersonen (s. o.), der Lehrkräfte und

ggf. Förderlehrkräfte unabdingbar. Nur wenn die Arbeitsweisen, Lerninhalte und die Art der Lernbegleitung an allen Lernorten sinnvoll zusammenwirken, können Schüler/innen, ihren Dispositionen entsprechend, tragfähige mathematische Konzepte entwickeln. Es ist dabei in der Regel sinnvoll, die Eltern über die Hintergründe der besonderen Schwierigkeiten ihrer Kinder zu informieren und dabei aufzuklären, dass diese nicht durch einfache Erklärungen im Sinne von »Rezepten« oder das vermehrte Üben zu beheben sind. Zum anderen ist es wichtig, die Eltern in Hinblick auf eine eventuelle häusliche Unterstützung kontinuierlich zu begleiten, und ihnen zu zeigen, wie sie ihr Kind adäquat unterstützen können (Vazquez et al. 2020).

6 Lernzielanpassungen und Nachteilsausgleich

Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen weisen gegenüber der Altersnorm in der Regel einen großen Leistungsrückstand auf. Dadurch stellt sich unter den aktuellen schulischen Rahmenbedingungen die Frage, ob und wie solche Schwierigkeiten u. a. in der Notengebung, bei der Frage der Versetzung von einer zur nächsten Klasse und des Übertritts in die Sekundarstufe berücksichtigt werden können und sollen. Dabei wird in der schulischen Praxis zwischen einer Reduktion von Lernzielen und damit verbunden einer individuellen Beurteilung einerseits und einem sogenannten »Nachteilsausgleich« andererseits unterschieden.

Reduktion von Lernzielen, individuelle Beurteilung: Wenn Schüler/innen besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen haben, wird eine Beurteilung gemessen an Lehrplanvorgaben in der Regel zu ungenügenden oder gerade noch genügenden Noten führen. Dies kann sich schon früh negativ auf die Motivation der betroffenen Schüler/innen auswirken, den mathematischen Basisstoff aufzuarbeiten. Wird aber der Basisstoff nicht aufgearbeitet, können die darauf aufbauenden Inhalte nicht verstanden werden (Abschnitt 3). Unter solchen Bedingungen führt die »in der Natur des Faches [Mathematik] liegende Lernhierarchie« (Wittmann 2015, S. 199) zumeist dazu, dass Schüler/innen mit besonderen Lernschwierigkeiten in Mathematik von Jahr zu Jahr weiter davon entfernt sind, die in den Curricula formulierten Jahrgangsziele erreichen zu können. Wird für diese Schüler/innen dennoch unter Missachtung oder Vernachlässigung der Defizite im Basisstoff am Einfordern der Jahrgangsziele bzw. der entsprechenden Inhalte festgehalten, kann dies im Grunde nur dazu führen, dass sie nach

Abschluss der Pflichtschulzeit massive Defizite in der mathematischen Grundbildung haben (Gaidoschik 2009; Selter et al. 2014).

In einigen (Bundes-)Ländern besteht in der Grundschule die Möglichkeit der Lernzielreduktion in Verbindung mit einer angepassten Leistungsbeurteilung. Dies kann die oben beschriebenen negativen Auswirkungen auf die Motivation der betroffenen Schüler/innen reduzieren, ändert für sich genommen allerdings nichts an den Leistungsrückständen. Sofern gezielte Förderung unterbleibt, können diese sogar noch größer werden. Es bedarf daher einerseits der gezielten, möglichst früh ansetzenden Förderung durch dafür qualifizierte, mit ausreichenden Zeitressourcen ausgestattete (Förder-)Lehrkräfte; andererseits und begleitend schulisch-administrative Maßnahmen, die den psychischen Druck auf die betroffenen Kinder reduzieren und der Motivation zum Aufholen von Leistungsrückständen förderlich sein können.

Nachteilsausgleich: Als Nachteilsausgleich bezeichnet man einen gesetzlich geregelten Rechtsanspruch auf eine bedarfsgerechte Anpassung von Prüfungsbedingungen oder Bedingungen im Unterricht. Er besteht für Personen mit Behinderung, chronischen Krankheiten und auch mit besonderen Schwierigkeiten beim Lernen. Dieser Rechtsanspruch beruht auf der UN-Behindertenrechtskonvention (Artikel 24) und den sich darauf beziehenden nationalen gesetzlichen Grundlagen. Nachteilsausgleiche werden derzeit für Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen in unterschiedlichen Ländern unterschiedlich gehandhabt, z. B. durch mehr Zeit bei Prüfungen, das Ablegen von Prüfungen in einem separaten Raum, den Einsatz einer Formelsammlung oder eines Taschenrechners (Studer 2019).

Aus mathematikdidaktischer Perspektive muss hier auf eine grundsätzliche Problematik hingewiesen werden. Während beispielsweise bei besonderen Schwierigkeiten beim Lesen *mehr Prüfungszeit* oder *Hilfsmittel* wie ein Lesestift durchaus dazu beitragen können, dass betroffene Schüler/innen sinnvoll und über die Jahre hin aufbauend an den Klassenzielen arbeiten können, gestaltet sich dies beim Mathematiklernen aufgrund der stofflichen Hierarchie deutlich schwieriger. Die Problematik der Hilfsmittelangebote im Fach Mathematik kann am Beispiel der Nutzung des Taschenrechners – dessen Einsatz manchmal als Nachteilsausgleichsmaßnahme vorgeschlagen wird (z. B. Studer 2019) – illustriert werden. Der selbstständige zielführende Einsatz des Taschenrechners zum Ausrechnen von Aufgaben im Kontext des Sachrechnens setzt beispielsweise etwas voraus, was Schüler/innen mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen häufig fehlt: tragfähige operative Vorstellungen zu den vier Grundrechenarten, um zu wissen, welche Rechnung zum Sachkontext passend in den Taschenrechner überhaupt einzugeben ist. Daneben sind basale Fähigkeiten

des (überschlagenden) Kopfrechnens und ein Grundverständnis des dezimalen Stellenwertsystems eine Voraussetzung, um Tippfehlern nicht hilflos ausgeliefert zu sein und die angezeigten Ergebnisse interpretieren zu können. Ebenso gleicht auch zusätzliche Prüfungszeit bei den Betroffenen im Fach Mathematik das fehlende Verständnis der Inhalte nicht aus. Zusätzliche Prüfungszeit kann zwar von den Betroffenen als entlastend empfunden werden, wird aber bei gravierenden Schwierigkeiten nichts an der Überforderung mit den Inhalten der Prüfung ändern.

Nachteilsausgleiche dieser Art können im Sinne einer punktuellen Entlastung und vorübergehender Hilfestellung wirksam sein. Sie ändern aber, ebenso wie Lernzielanpassungen und Notenaussetzung (s. o.), nichts an den zugrundeliegenden Schwierigkeiten. Solange letztere bestehen bleiben, haben die betroffenen Kinder und Jugendlichen weiterhin alle die massiven Nachteile zu tragen, die mit den beschriebenen Defiziten im mathematischen Basisstoff und darauf aufbauenden Inhalten verbunden sind, von negativen Folgen für die weitere Schullaufbahn über Einschränkungen bei der späteren Berufswahl bis hin zu erheblichen Beeinträchtigungen bei einer Vielzahl von Alltagssituationen (Mueller & Moeller 2017; Nolte 2008).

Für eine nachhaltige, nicht nur kompensatorisch wirksame Unterstützung von Schüler/innen, die besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen entwickelt haben, ist aus mathematikdidaktischer Perspektive grundsätzlich zu fordern, dass stets am fachlichen Kern des Problems gearbeitet wird – und dies zielt auf

- einen Mathematikunterricht (in der Grundschule wie auch darüber hinaus), der nach den in Abschnitt 5 beschriebenen Prinzipien gestaltet wird;
- eine mit dem Mathematikunterricht verzahnte zusätzliche Förderung gemäß den in 5.3 erläuterten Grundüberlegungen;
- eine fachlich und fachdidaktisch gute Ausbildung der Lehrkräfte für den Klassen- und Förderunterricht und die Bereitstellung einer ausreichenden Anzahl solch gut ausgebildeter Lehrkräfte;
- die Bereitstellung ausreichender Zeitressourcen, damit diese Lehrkräfte auch im Team-Teaching und in zusätzlicher Förderung aktiv werden können;
- die Möglichkeit, Lernziele über die Grundschule hinaus dem anzupassen, was für die betroffenen Kinder und Jugendlichen unter Beachtung der stofflichen Hierarchie der Pflichtschulmathematik erreichbar ist.

Danksagung

Für ihre Diskussionsbeiträge danken die Autor*innen Kerstin Bräuning, Myriam Burtscher, Alina Guther, Andreas Kittel, Barbara Lirk, Jens Holger Lorenz, Andrea Peter-Koop, Dinah Reuter, Bettina Rösken-Winter, Britta Rudolph, Silke Ruwisch, Maike Schindler, Sabine Schorlein, Stephanie Schuler, Heidi Tiefenthaler, Marianne Walt, Kirsten Winkel, Gerald Wittmann und Bernd Wollring.

Quellen

- Baroody, A. (2006). Why Children Have Difficulties Mastering the Basic Number Combinations and How to Help Them. *Teaching Children Mathematics*, 13(1), 22–31.
- Benz, C. (2010). *Minis entdecken Mathematik*. Braunschweig: Westermann.
- Benz, C., Peter-Koop, A., & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung*. Berlin: Springer.
- Bönig, D. (1995). *Multiplikation und Division. Empirische Untersuchungen zum Operationsverständnis bei Grundschulern*. Münster: Waxmann.
- Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenböcker, M., & Thöne, B. (2017). *Erzähl mal Mathe! Mathematiklernen im Kindergartenalltag und am Schulanfang*. Seelze: Kallmeyer.
- Bräuning, K., & Nührenböcker, M. (2010). Diagnoseaufgaben und Förderideen im mathematischen Anfangsunterricht. In P. Hanke, G. Möwes-Butschko, A. K. Hein, D. Berntzen & A. Thielges (Hrsg.), *Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule* (S. 297–304). Münster, ZfL Verlag.
- Bräuning, K., & Schülke, C. (2010). Mathematische Diagnosegespräche mit Kindern. In C. Böttinger, K. Bräuning, M. Nührenböcker, R. Schwarzkopf, E. Söbbeke (Hrsg.), *Mathematik im Denken der Kinder. Anregungen zur mathematikdidaktischen Reflexion* (S. 138–168). Seelze-Velber, Kallmeyer Verlag.
- Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin: Berlin Verlag.
- Carey, E., Hill F., Devine, A. & Szűcs, D. (2016). The chicken or the egg? The direction of the relationship between mathematics anxiety and mathematics performance. *Frontiers in Psychology*, 6, 1–6.
- Deutsche Gesellschaft für Kinder- und Jugendpsychiatrie, Psychosomatik und Psychotherapie e. V. (2018). *S3-Leitlinie: Diagnostik und Behandlung der Rechenstörung*. Verfügbar unter https://www.bvl-legasthenie.de/images/static/pdfs/Leitlinien/S3-Leitlinie_Rechenstörung_Langfassung.pdf
- Devine, A., Hill, F., Carey, E., & Szűcs, D. (2018). Cognitive and emotional math problems largely dissociate: Prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety. *Journal of Educational Psychology*, 110(3), 431–444.
- Devlin, K. (1994). *Mathematics – The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library.
- Devlin, K. (2002). *Muster der Mathematik – Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.
- Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos.
- Ehlert, A., Schroeders, U., & Fritz-Stratmann, A. (2012). Kritik am Diskrepanzkriterium in der Diagnostik von Legasthenie und Dyskalkulie. *Lernen und Lernstörungen*, 1(3), 169–184.
- Fritz, A., Schmidt, S., & Ricken, G. (2017) (Hrsg.). *Handbuch Rechenschwäche* (3. Auflage). Weinheim: Beltz.
- Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Fuson, K., Wearne, D., Hiebert, J., Murray, H., Human, P., Olivier, A., Carpenter, T., & Fennema, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(2), 130–162.
- Gaidoschik, M. (2007). *Rechenschwächen vorbeugen – Erstes Schuljahr: Vom Zählen zum Rechnen. Das Handbuch für LehrerInnen und Eltern*. Wien: öbv-hpt.
- Gaidoschik, M. (2009). »Rechenschwäche« in der Sekundarstufe: Was tun? *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3/4), 287–294.
- Gaidoschik, M. (2010). *Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres*. Wien.
- Gaidoschik, M. (2012). *Rechenschwäche – Dyskalkulie. Eine unterrichtspraktische Einführung für LehrerInnen und Eltern* (7. Aufl.). Buxtehude: Persen.
- Gaidoschik, M. (2019a). Didactics as source and remedy of mathematics learning difficulties. In A. Fritz, V. Haase, & P. Räsänen, P. (Hrsg.), *The International Handbook of Math Learning Difficulties: from the lab to the classroom* (S. 73–89). Cham: Springer.
- Gaidoschik, M. (2019b). *Rechenschwäche verstehen – Kinder gezielt fördern: Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis* (1. bis 4. Klasse). Buxtehude: Persen Verlag.
- Gaidoschik, M., Fellmann, A., Guggenbichler, S., & Thomas, A. (2017). Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. *Journal für Mathematikdidaktik*, 38(1), 93–124.
- Gasteiger, H. (2010). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlagen und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes*. Münster: Waxmann.
- Gasteiger H. (2015) Early Mathematics in Play Situations: Continuity of Learning. In B. Perry B., A. MacDonald & A. Gervasoni (Hrsg.), *Mathematics and Transition to School. Early Mathematics Learning and Development* (S. 255–271). Singapore: Springer.
- Gasteiger, H., Bruns, J., Benz, C., Brunner, E., & Sprenger, P. (2019). Mathematical pedagogical content knowledge of early childhood teachers – A standardized situation-related measurement approach. *ZDM Mathematics Education*, 52(2), 193–205.
- Geary, D.C., Hoard, M.K., & Bailey, D. H. (2012). Fact retrieval deficits in low achieving children and children with mathematical learning disability. *Journal of Learning Disabilities*, 45(4), 291–207.

- Gerster, H.-D. (2017). Schriftliche Rechenverfahren verstehen – Methodik und Fehlerprävention. In A. Fritz, S. Schmidt & Ricken, G. (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie* (3. Auflage, S. 244–265). Weinheim: Beltz.
- Gerster, H.-D., & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen*. Freiburg im Breisgau: PH Freiburg. <https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf>
- Götze, D. (2019a). Language-sensitive support of multiplication concepts among at-risk children. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 17(2), 165–182.
- Götze, D. (2019b). Schriftliches Erklären operativer Muster fördern. *Journal für Mathematikdidaktik*, 40(1), 95–121.
- Götze, D. (2019c). The cognitive function of language and its influence on the learning of mathematics in inclusive settings – a primary school study on the example of division and divisibility. In M. Knigge et al. (Hrsg.), *Inclusive mathematics education: Research results from Brazil and Germany* (S. 357–376). Cham: Springer.
- Götze, D., Selter, Ch., & Zannetin, E. (2019). *Das KIRA Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht*. Seelze: Kallmeyer.
- Häsel-Weide, U. (2016). *Vom Zählen zum Rechnen. Struktur-fokussierende Deutungen in kooperativen Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Häsel-Weide, U., & Nührenböcker, M. (2012). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker, & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern – Kompetenzen stärken in der Eingangsstufe (Kl. 1 und 2)*. Hemsbach: Beltz.
- Häsel-Weide, U., Nührenböcker, M., Moser Opitz, E., & Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen. Förder-einheiten für heterogene Lerngruppen*. Seelze: Kallmeyer.
- Häsel-Weide, U., & Nührenböcker, M. (2013). Fördern im Mathematikunterricht. In H. Bartnitzky, U. Hecker & M. Lassek (Hrsg.), *Individuell fördern – Kompetenzen stärken ab Klasse 3*. Frankfurt am Main: Grundschulverband.
- Häsel-Weide, U., & Nührenböcker, M. (2017). *Förderkommentar Lernen zum Zahlenbuch 1*. Leipzig: Klett.
- Häsel-Weide, U., Meier, S., & Nührenböcker, M. (2017). *Förderkommentar Lernen zum Zahlenbuch 2*. Leipzig: Klett.
- Häsel-Weide, U., Nührenböcker, M., & Reinold, M. (2018). *Förderkommentar Lernen zum Zahlenbuch 3*. Leipzig: Klett.
- Häsel-Weide, U., Nührenböcker, M., & Reinold, M. (2019). *Förderkommentar Lernen zum Zahlenbuch 4*. Leipzig: Klett.
- Haruehansawasin, S., & Kiattikomol, P. (2018). Scaffolding in problem-based learning for low-achieving learners. *The Journal of Educational Research*, 111(3), 363–370.
- Hauser, B., Rathgeb-Schnierer, E., Stebler, R., & Vogt, F. (Hrsg.) (2015). *Mehr ist mehr. Mathematische Frühförderung mit Regelspielen*. Seelze: Kallmeyer
- Heckmann, K. (2006). *Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde*. Berlin: Logos.
- Hengartner, E. (1999). *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht*. Zug: Klett und Balmer.
- Hengartner, E., Hirt, U., Wälti, B., Primarschulteam Lupsingen (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett und Balmer.
- Hirt, U., & Wälti, B. (2007). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze: Kallmeyer.
- Ise, E., Dolle, K., Pixner, S. & Schulte-Körner, G. (2012) Effektive Förderung rechenschwacher Kinder. *Kindheit und Entwicklung*, 21, 181–192.
- Jacobs, C., & Petermann, F. (2007). *Rechenstörungen*. Göttingen: Hogrefe.
- Jörns, C., Schuchardt, K., Grube, D., & Mähler, C. (2014). Spielorientierte Förderung numerischer Kompetenzen im Vorschulalter und deren Eignung zur Prävention von Rechenschwierigkeiten. *Empirische Sonderpädagogik*, 6(3), 243–259.
- Jordan, N. C., Kaplan, D., Locuniak, M. N., & Ramineni, C. (2007). Predicting First-Grade Math Achievement from Developmental Number Sense Trajectories. *Learning Disabilities Research & Practice*, 22(1), 36–46.
- Kaufmann, S. (2003) *Früherkennung von Rechenstörungen in der Eingangsklasse der Grundschule und darauf abgestimmte remediale Maßnahmen*. Frankfurt am Main: Peter Lang.
- Kaufmann, S., & Lorenz, J. H. (2006). *Diagnose- und Förderbox Mathematik 1-4*. Braunschweig: Schrödel-Verlag.
- Kaufmann, S., & Wessolowski, S. (2006). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine*. Seelze: Kallmeyer.
- Klewitz, G., Köhnke, A., & Schipper, W. (2008). *Handreichung zur Förderung von Kindern mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen*. Berlin-Brandenburg: Lisum.
- Krajewski, K., & Ennemoser, M. (2010). Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen in der Sekundarstufe. *Empirische Pädagogik*, 24(4), 353–370.
- Krajewski, K., & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, 19(6), 513–526.
- Krajewski, K., Nieding, G., & Schneider, W. (2008). Kurz- und langfristige Effekte mathematischer Frühförderung im Kindergarten durch das Programm »Mengen, zählen, Zahlen«. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, 40, 135–146.
- Krauthausen, G., & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht – Konzepte und Praxisbeispiele aus der Grundschule*. Seelze: Kallmeyer.
- Krinzinger H., Kaufmann L., & Willmes K. (2009). Math anxiety and math ability in early primary school years. *Journal of Psychoeducational Assessment*, 27(3), 206–225.
- Kucharz, D., Mackowiak, K., Zirol, S., Kauertz, A., & Rathgeb-Schnierer, E. (Hrsg.). (2014). *Professionelles Handeln im Elementarbereich (PRIMEL): Eine deutsch-schweizerische Videostudie*. Münster: Waxmann Verlag.
- Kuhnke, K. (2013). *Vorgehensweisen von Grundschulkindern beim Darstellungswechsel – Eine Untersuchung am Beispiel der Multiplikation im 2. Schuljahr*. Wiesbaden: Springer.
- Kwapis, J., Meyerhöfer, W., Steffen, O., & Grütte, D. (2018). *Manual zum Jenaer Rechentest für die Klassen 1 bis 4*. Münster: WTM-Verlag.
- Lambert, K. (2014). *Rechenschwäche. Grundlagen, Diagnostik und Förderung*. Göttingen: Hogrefe.

- Lambert, K., & Moeller, K. (2019). Place-value computation in children with mathematics difficulties. *Journal of experimental child psychology*, 178, 214–225.
- Langhorst, P., Ehlert, A., & Fritz, A. (2011). Das Teil-Teil-Ganze-Konzept. Voraussetzungen, Bedeutung und Nachhaltigkeit. *Mathematischer und naturwissenschaftlicher Unterricht, Primar*, 3(1), 10–17.
- Link, M., Kuratil Geeler, S., Schmassmann, M., & Moser Opitz, E. (2019). *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 5 und 6: Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten (vollständig überarbeitete Neuauflage)*. Baar: Klett und Balmer.
- Lorenz, J.H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht – Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.
- Lorenz, J. H., & Radatz, H. (1993). *Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.
- Lorenz, J. H. (2011). Anschauungsmittel und Zahlenrepräsentation. *Medien und Materialien. Tagungsband des AK Grundschule in der GDM*, 1, 39–54.
- Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht. Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern*. Münster: Waxmann.
- Mazzocco, M. M. M. (2005). Challenges in identifying target skills for math disability screening and intervention. *Journal of Learning Disabilities*, 38, 318–323.
- Meyerhöfer, W. (2018). Verständnis. Ein Ansatz zur begrifflichen Erschließung mathematischer Inhalte. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1243–1246). Münster: WTM-Verlag.
- Moeller, K., Pixner, S., Zuber, J., Kaufmann, L., & Nuerk, H. C. (2011). Early place-value understanding as a precursor for later arithmetic performance – A longitudinal study on numerical development. *Research in Developmental Disabilities*, 32(5), 1837–1851.
- Montague, M. (2011). Effective instruction in mathematics for students with learning difficulties. In C. Wyatt-Smith, J. Elkins, & S. Gunn (Hrsg.), *Multiple perspectives on difficulties in learning, literacy and numeracy* (S. 295–313). Dordrecht, Netherlands: Springer Science and Business.
- Moser Opitz, E. (2008). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen. Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen* (3. Aufl.). Bern: Haupt.
- Moser Opitz, E. (2013). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern* (2. Aufl.). Bern: Haupt.
- Moser Opitz, E., Freesemann, O., Grob, U., Prediger, S., Matull, I., & Hussmann, S. (2017). Remediation for Students with Mathematics Difficulties: An Intervention Study in Middle Schools. *Journal of Learning Disabilities*, 50(6), 724–736.
- Moser Opitz, E., Grob, U., Wittich, C., Häsel-Weide, U., & Nührenbörger, M. (2018). Fostering the Computation Competence of Low Achievers through Cooperative Learning in Inclusive Classrooms: A Longitudinal Study. *Learning Disabilities: A Contemporary Journal*, 16(1), 19–35.
- Moser Opitz, E., & Ramseier, E. (2012). Rechenschwach oder nicht rechenschwach? Eine kritische Auseinandersetzung mit Diagnosekonzepten, Klassifikationssystemen und Diagnoseinstrumenten unter besonderer Berücksichtigung von älteren Schülerinnen und Schülern. *Lernen und Lernstörungen*, 1(2), 99–117.
- Moser Opitz, E. & Schindler, V. (2021). Disentangling the relationship between mathematical learning disability and second-language acquisition. In A. Fritz-Stratmann, E. Gürsoy & M. Herzog (Hrsg.), *Diversity dimensions in mathematics and language learning. Perspectives on culture, and multilingualism* (S. 245–264). Berlin: De Gruyter.
- Mueller, A., & Moeller, K. (2017). Dyskalkulie bei Erwachsenen in drei Fallbeschreibungen. *Lernen und Lernstörungen*, 6, 19–24.
- Mutlu, Y. (2019). Math Anxiety in Students with and without Math Learning Difficulties. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 11(5), 471–475. Verfügbar unter <https://www.iejee.com/index.php/IEJEE/article/view/755>
- Nolte, M. (2008). Zur Situation von Menschen mit niedrigen mathematischen Qualifikationen – Nichtrechner. In E. Vársárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zur 42. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 13. bis 18. März 2008 in Budapest* (S. 531–534). Münster: WTM-Verlag.
- Nührenbörger, M., & Steinbring, H. (2009). Forms of mathematical interaction in different social settings – Examples from students', teachers' and teacher-students' communication about mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12(2), 111–132
- Nührenbörger, M., & Pust, S. (2006). *Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien im differenzierten Anfangsunterricht Mathematik*. Seelze: Kallmeyer.
- Nührenbörger, M., & Schwarzkopf, R. (2019). Argumentierendes Rechnen: Algebraische Lernchancen im Arithmetikunterricht der Grundschule. In B. Brandt & K. Tiedemann (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung* (S. 15–35). Münster: Waxmann.
- Ostad, S. A. (1997). Developmental differences in addition strategies: a comparison of mathematically disabled and mathematically normal children. *British Journal of Educational Psychology*, 64, 345–357.
- Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B., & Grübing, M. (2007). *Elementarmathematisches Basisinterview*. Offenburg: Mildenerberger.
- Prediger, S., Fischer, C., Selter, C., & Schöber, C. (2019). Combining material- and community-based implementation strategies for scaling up: The case of supporting low-achieving middle school students. *Educational Studies in Mathematics*, 102(3), 361–378.
- Rasch, R. (2007). *Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 1/2 (3/4). Aufgabenbeispiele und Schülerbearbeitungen*. Seelze: Kallmeyer.
- Rathgeb-Schnierer, E. (2006). *Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen: Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze*. Hildesheim; Berlin: Franzbecker.
- Rathgeb-Schnierer, E. (2010). Entwicklung flexibler Rechenkompetenzen bei Grundschulkindern des 2. Schuljahrs. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(2), 257–283.
- Rathgeb-Schnierer, E., & Rechtsteiner, Ch. (2018). *Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Grundlagen – Beispiele – Förderung*. Heidelberg: Springer.

- Ratz, C. (2009). *Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht bei Schülern mit geistiger Behinderung. Eine qualitative Studie am Beispiel von mathematischen Denkspielen*. Oberhausen: Athena.
- Rechtsteiner, Ch., & Rathgeb-Schnierer, E. (2017). "Zahlenblickschulung" as Approach to Develop Flexibility in Mental Calculation in all Students. *Journal of Mathematics Education*, 10(1), 1–16.
- Rechtsteiner-Merz, Ch. (2013). *Flexibles Rechnen und Zahlenblickschulung. Entwicklung und Förderung von Rechenkompetenzen bei Erstklässlern, die Schwierigkeiten beim Rechnenlernen zeigen*. Münster: Waxmann.
- Royar, T., & Streit, C. (2010). *MATHElino. Kinder begleiten auf mathematischen Entdeckungsreisen*. Seelze: Klett Kallmeyer.
- Royar, T. (2013). *Handlung – Vorstellung – Formalisierung. Entwicklung und Evaluation einer Aufgabenreihe zur Überprüfung des Operationsverständnisses für Regel- und Förderklassen*. Hamburg: Kovač.
- Schäfer, J. (2005). *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen. Eine empirische Studie*. Hamburg: Kovač.
- Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte – Theoretische Grundlegung und evaluierte unterrichtspraktische Erprobung*. Heidelberg: Edition Schindele.
- Scherer, P. (1999, 2003, 2005). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Bd. 1–3*. Horneburg: Persen.
- Scherer, P., & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. München: Spektrum-Akademischer Verlag.
- Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht*. Braunschweig: Schroedel.
- Schipper, W., Wartha, S., & von Schroeders, N. (2011). *BIRTE 2 – Bielefelder Rechentest für das 2. Schuljahr*. Braunschweig: Schroedel.
- Schmassmann, M., & Moser Opitz, E. (2007). *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 1. Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten* (2. vollständig überarbeitete Auflage). Zug: Klett & Balmer.
- Schmassmann, M., & Moser Opitz, E. (2008a). *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 2. Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten* (2. vollständig überarbeitete Auflage). Zug: Klett & Balmer.
- Schmassmann, M., & Moser Opitz, E. (2008b). *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 3. Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten* (2. vollständig überarbeitete Auflage). Zug: Klett & Balmer.
- Schmassmann, M., & Moser Opitz, E. (2011). *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 4. Hinweise zur Arbeit mit Kindern mit mathematischen Lernschwierigkeiten* (vollständig überarbeitete Neuauflage). Zug: Klett & Balmer.
- Schütte, S. (1994). *Mathematiklernen in Sinnzusammenhängen*. Stuttgart: Klett.
- Schütte, S. (2008). *Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule sichern. Für eine zeitgemäße Unterrichts- und Aufgabekultur*. München: Oldenbourg.
- Schuler, S. (2013). *Mathematische Bildung im Kindergarten in formal offenen Situationen: eine Untersuchung am Beispiel von Spielen zum Erwerb des Zahlbegriffs*. Münster: Waxmann Verlag.
- Schuler, S., Streit, C., & Wittmann, G. (Hrsg.) (2017). *Perspektiven mathematischer Bildung im Übergang vom Kindergarten zur Grundschule*. Wiesbaden: Springer.
- Selter, C., & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Leipzig: Klett Grundschulverlag.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenböcker, M., & Hußmann, S. (Hrsg.) (2014). *Mathe sicher können. Natürliche Zahlen*. Berlin: Cornelsen.
- Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.
- Sorvo, R., Koponen, T., Viholainen, H., Aro, T., Räikkönen, E., Peura, P. et al. (2017). Math anxiety and its relationship with basic arithmetic skills among primary school children. *British Journal of Educational Psychology*, 87, 309–327.
- Sprenger, L. (2018). *Zum Begriff des Dezimalbruchs. Eine empirische Studie zum Dezimalbruchverständnis aus inferentialistischer Perspektive*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Steenpaß, A., & Steinbring, H. (2014). Young students' subjective interpretations of mathematical diagrams: elements of the theoretical construct »frame-based interpreting competence«. *ZDM Mathematics Education*, 46, 3–14.
- Steinbring, H. (1994). Die Verwendung strukturierter Diagramme im Arithmetikunterricht der Grundschule – Zum Unterschied zwischen empirischer und theoretischer Mehrdeutigkeit mathematischer Zeichen. *Mathematische Unterrichtspraxis*, (4), 7–19.
- Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction*. Berlin: Springer.
- Steinweg, A.S. (2013). *Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen – Gleichungen – funktionale Beziehungen*. Berlin: Springer.
- Stöckli, M. (2019). *Unterrichtsbasierte Förderung im Mathematikunterricht: Eine empirische Studie in der Primarstufe*. Dissertation, Universität Zürich. Verfügbar unter <https://www.zora.uzh.ch/id/eprint/177335/>
- Studer, M. (2019). *Nachteilsausgleich im Gymnasium. Ein Handbuch für die Praxis*. Verlag am Tobelacker: Wetzikon.
- Sundermann, B., & Selter, C. (2006). *Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht*. Berlin: Cornelsen.
- Swanson, H. L., & Jerman, O. (2006). Math Disabilities: A selective meta-analysis of the literature. *Review of Educational Research*, 76, 249–274.
- Tiedemann, K., & Rottmann, T. (2019). Beschreibungen als fachliche Wegweiser – Zu Beschreibungen von Materialhandlungen im Prozess der Strategieentwicklung. In B. Brandt & K. Tiedemann (Hrsg.), *Interpretative Unterrichtsforschung* (S. 165–192). Münster: Waxmann.
- Tubach, D. (2019). *Relationales Zahlverständnis im Übergang von der Kita zur Grundschule. Entwicklung und Erforschung komplementärer Spiel- und Lernumgebungen*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

- Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2004). Strategy Development in Children with Mathematical Disabilities: Insights from the Choice/No-Choice Method and the Chronological-Age/Ability-Level-Match Design. *Journal of Learning Disabilities, 37*(2), 119–131.
- van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. (2018). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally. 10th edition*. Boston: Pearson.
- van Oers, B. (2010). Emergent mathematical thinking in the context of play. *Educational Studies in Mathematics, 74*(1), 23–37.
- van Oers, B. (2013). Challenges in the innovation of mathematics education for young children. *Educational Studies in Mathematics, 84*(2), 267–272.
- Vazquez, S.R., Ermeling, B. A., & Ramirez, G. (2020). Parental Beliefs on the Efficacy of Productive Struggle and Their Relation to Homework-Helping Behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 51*(2), 179–203.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007a). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Hrsg.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Bd. 1, S. 557–628). Charlotte: NCTM.
- Verschaffel, L., Torbeyns, J., De Smedt, B., Luwel, K., & Van Dooren, W. (2007b). Strategy flexibility in children with low achievement in mathematics. *Educational & Child Psychology, 24*(2), 16–27.
- Vogt, F., Hauser, B., Stebler, R., Rechsteiner, K., & Urech, C. (2018). Learning through play – pedagogy and learning outcomes in early childhood mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal, 26*(4), 589–603.
- Wartha, S., Hörhold, J., Kaltenbach, M., & Schu, S. (2019). *Grundvorstellungen aufbauen – Rechenprobleme überwinden. Zahlen, Addition und Subtraktion bis 100*. Braunschweig: Westermann
- Wartha, S. (2009). Rechenstörungen in der Sekundarstufe. Die Bedeutung des Übergangs von der Grundschule zur weiterführenden Schule. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 157–180). Münster: Waxmann.
- Wartha, S., & Schulz, A. (2012). *Rechenproblemen vorbeugen*. Berlin: Cornelsen.
- Wissmann, J., Heine, A., Handl, P., & Jacobs, A. M. (2013). Förderung von Kindern mit isolierter Rechenschwäche und kombinierter Rechen- und Leseschwäche: Evaluation eines numerischen Förderprogramms für Grundschüler. *Lernen und Lernstörungen, 2*(2), 91–109.
- Winter, F. (2015). *Leistungsbewertung: Eine neue Lernkultur braucht einen anderen Umgang mit den Schüleleistungen* (5. überarb. und erw. Aufl.). Hohengehren: Schneider Verlag.
- Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht: Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Wittmann, E. Ch. (1995). Aktiv-entdeckendes und soziales Lernen im Rechenunterricht – vom Kind und vom Fach aus. In G. N. Müller, & E. Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 10–41). Frankfurt am Main: Grundschulverband.
- Wittmann, E. Ch. (2003). Was ist Mathematik und welche Bedeutung hat das wohlverstandene Fach auch für den Mathematikunterricht der Grundschule? In M. Baum & H. Wielpütz (Hrsg.), *Mathematik in der Grundschule* (S. 18–48). Seelze: Kallmeyer.
- Wittmann, E. Ch. (2015). Das systemische Konzept von Mathe 2000+ zur Förderung »rechenschwacher« Kinder. In H. Schäfer & C. Rittmeyer, (Hrsg.), *Handbuch Inklusive Diagnostik* (S. 199–213). Weinheim: Beltz.
- Wittmann, E. Ch. (Hrsg.) (2016). *Kinder spielerisch fördern – mit echter Mathematik. Anregungen zur Kooperation von Kindergarten und Grundschule mit dem Mathe 2000-Frühförderprogramm*. Seelze: Kallmeyer.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2007a). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzler & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Berlin: Cornelsen.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2007b). *Blitzrechenoffensive! Anregungen für eine intensive Förderung mathematischer Basiskompetenzen*. Stuttgart, Leipzig: Klett.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2017). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins*. Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Wittmann, E. Ch., & Müller, G. N. (2018). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen*. Seelze: Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Wollring, B. (2004). Individualdiagnostik im Mathematikunterricht der Grundschule als Impulsgeber für Fördern, Unterrichten und Ausbilden. Teil 2: Handlungsleitende Diagnostik. *Schulverwaltung HRS. Zeitschrift für SchulLeitung, SchulAufsicht und SchulKultur. Ausgabe Hessen, Rheinland-Pfalz und Saarland, 8*(11), 297–298.
- Wullschleger, A. (2017). *Individuell-adaptive Lernunterstützung im Kindergarten: Eine Videoanalyse zur spielintegrierten Förderung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen*. Münster: Waxmann.

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e. V. (GDM)

Herausgeber des vorliegenden Positionspapiers „Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen“ ist die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM), eine wissenschaftliche Vereinigung mit dem Ziel, die Didaktik der Mathematik insbesondere in deutschsprachigen Ländern zu fördern. Sie beschäftigt sich somit mit dem Lernen und Lehren von Mathematik in allen Altersstufen und sucht Antworten u. a. auf Fragen der Art: Wie

könnte oder sollte ein bestimmter mathematischer Inhalt gelehrt oder eine bestimmte mathematische Fähigkeit verstehensorientiert erarbeitet werden?

In dem vorliegenden Positionspapier wird diese Fragestellung unter einem besondere Fokus betrachtet. Es fasst die mathematikdidaktische Expertise und das aktuelle mathematikdidaktische Wissen zum Umgang mit besonderen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen zusammen.

- *1. Vorsitzender:* Prof. Dr. Andreas Eichler, Universität Kassel, Institut für Mathematik, Heinrich-Plett-Straße 40, 34132 Kassel. Tel. (0561) 804-4310, eichler@mathematik.uni-kassel.de
- *2. Vorsitzende:* Prof. Dr. Katja Lengnink, Justus-Liebig-Universität Gießen, Institut für Didaktik der Mathematik, Karl-Glückner-Straße 21c, 35394 Gießen. Tel.: (0641) 99-32221, katja.lengnink@math.uni-giessen.de
- *Kassenführer:* Prof. Dr. Torsten Fritzlar, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Philosophische Fakultät III – Erziehungswissenschaften, Institut für Schulpädagogik und Grundschuldidaktik, Franckeplatz 1, Haus 31, 06110 Halle (Saale). Tel. (0345) 5523-880, torsten.fritzlar@paedagogik.uni-halle.de
- *Schriftführerin:* Prof. Dr. Daniela Götze, Universität Siegen, Fakultät IV, Department Mathematik, Didaktik der Mathematik, Adolf-Reichwein-Straße 2, 57076 Siegen, Tel. (0271) 740-3538, goetze@mathematik.uni-siegen.de
- *Bankverbindung:* Vereinigte Raiffeisenbanken Heroldsberg, Kto-Nr. 305 87 00, BLZ 770 694 61, IBAN DE05 7706 9461 0003 0587 00, BIC GENODEF1GBF.
- *Homepage der GDM:* www.didaktik-der-mathematik.de

Impressum

• Verleger: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. (GDM) • Herausgeberin: Prof. Dr. Daniela Götze, Universität Siegen, Fakultät IV, Department Mathematik, Didaktik der Mathematik, Adolf-Reichwein-

Straße 2, 57076 Siegen, Tel. (0271) 740-3538, goetze@mathematik.uni-siegen.de • Gestaltung/Satz: Christoph Eyrich, Berlin • Umschlagentwurf: Prof. Dr. Daniela Götze • Druck: Oktoberdruck GmbH, Berlin

Kontakte und weitergehende Informationen

Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Wissenschaftliche Vereinigung mit dem Ziel, die Didaktik der Mathematik zu fördern
didaktik-der-mathematik.de

Prof. Dr. Michael Gaidoschik

Universität Bozen, Fakultät für Bildungswissenschaften
www.unibz.it/de/faculties/education/academic-staff/person/37288-michael-gaidoschik

Prof. Dr. Elisabeth Moser Opitz

Universität Zürich, Institut für Erziehungswissenschaft
www.ife.uzh.ch/de/research/moseropitz/mitarbeitende2/moseropitzelisabeth.html

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger

Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik
www.mathematik.tu-dortmund.de/agnuehrenboerger/de/personen/nuehrenboerger.html

Prof. Dr. Elisabeth Rathgeb-Schnierer

Universität Kassel, Institut für Mathematik
www.uni-kassel.de/fb10/institute/mathematik/arbeitsgruppen/didaktik-der-mathematik/prof-dr-elisabeth-rathgeb-schnierer

Arbeitskreis des Zentrums für angewandte Lernforschung

Einrichtung für Öffentlichkeitsarbeit, Ausbildung und Qualitätsstandards für Lerntherapie
www.arbeitskreis-lernforschung.de

Therapieeinrichtungen für die Behandlung von Rechenschwäche

zusammengestellt vom Institut für Mathematisches Lernen
www.zahlbegriff.de/rechenschwaechе.html

Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig und Gifhorn

seit 2002 unter der Leitung von Dr. Inga Diop und Dr. Michael Wehrmann

| | | |
|--|--|--------------------|
| www.iml-braunschweig.de | info@iml-braunschweig.de | 0531 - 12 16 77 50 |
| www.iml-gifhorn.de | info@iml-gifhorn.de | 05371 - 9 45 95 98 |

Die Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) ist eine wissenschaftliche Vereinigung mit dem Ziel, die Didaktik der Mathematik – insbesondere in deutschsprachigen Ländern – zu fördern und mit entsprechenden Institutionen in anderen Ländern zusammenzuarbeiten. Sie wurde am 12. und 13. März 1975 in Saarbrücken während der Jahrestagung für Didaktik der Mathematik gegründet. Die Mathematikdidaktik beschäftigt sich mit dem Lernen und Lehren von Mathematik in allen Altersstufen. In diesem Sonderheft sind die Schwierigkeiten beim Lernen das Thema.

didaktik-der-mathematik.de

Das **Institut für Mathematisches Lernen** ist eine Beratungs- und Forschungseinrichtung für Diagnostik, Therapie und Prävention der Rechenschwäche/Dyskalkulie in Braunschweig und Gifhorn unter der Leitung von Dr. Inga Diop und Dr. Michael Wehrmann. Dr. Wehrmann promovierte an der Humboldt-Universität zu Berlin zum Thema „Qualitative Diagnostik von Rechenschwierigkeiten“. Da dieser informative und praxisrelevante Text unter einer freien Lizenz zur Verfügung steht, entschlossen wir uns, ihn für interessierte Lehrkräfte und Eltern nachzudrucken.

www.zahlbegriff.de

Der **Arbeitskreis des Zentrums für angewandte Lernforschung** ist ein überregionaler Verbund unabhängiger Facheinrichtungen im Forschungsbereich der „Rechenschwierigkeiten“. Der Arbeitskreis hat Einblick über den Stand, Verlauf und Fortschritt von ca. 15.000 erfolgreich abgeschlossenen und zur Zeit etwa 1.200 laufenden Dyskalkulie-therapien. Seine Aufgabengebiete sind Forschung, Beratung und Fortbildung. Aus dieser Arbeit wurden Qualitätskriterien für Ausbildung von Lerntherapeuten und die Dyskalkulietherapie entwickelt.

www.arbeitskreis-lernforschung.de

**Michael Gaidoschik, Elisabeth Moser Opitz,
Marcus Nührenbörger und Elisabeth Rathgeb-Schnierer**

Unter Beratung von: Daniela Götze,
Uta Häsel-Weide und Wolfram Meyerhöfer

Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen



Sonderausgabe 2021